

均布与线性荷载作用下的简支 T 梁翼缘的有效宽度

秦绪喜^{1,2}, 刘寒冰², 焦玉玲²

(1. 吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130022; 2. 吉林大学 交通学院, 长春 130022)

摘要:以辛弹性力学方法为基础,将简支宽翼缘 T 梁翼缘部分简化为平面应力板,推导了简支 T 梁在满跨均布荷载与线性荷载作用下翼缘部分的有效宽度的表达式。将均布荷载下翼缘有效宽度比求解结果与英国规范 BS5400 中的取值进行了比较,验证了本文闭合多项式形式的有效宽度表达式的正确性。用本文方法计算 T 梁翼缘有效宽度简洁有效,丰富了简支 T 梁桥有效宽度的理论分析并简化了计算。

关键词:道路工程;简支 T 梁;T 梁翼缘;有效宽度;哈密顿体系;圣维南问题

中图分类号:U448.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5497(2010)04-0986-05

Effective flange width of T simple-supported beam under uniform or linear load

QIN Xu-xi^{1,2}, LIU Han-bing², JIAO Yu-ling²

(1. College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China; 2. College of Transportation, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: Simplifying the flange of T simple-supported beam as the plane stress plate, an expression in closed polynomial form was derived based on the method of symplectic elasticity for the effective width of the T simple-supported beam under uniform or linear load acting on whole span. The solution of the effective width ratio from the expression under the uniform load was compared with the data in British Standard BS5400 and the result show that the obtained expression is correct, simple and effective, enriches the theoretical analysis and simplified calculation of the effective width in the T simple-supported beam bridge.

Key words: road engineering; T simple-supported beam; flange of T simple beam; effective width; Hamiltonian system; Saint-Venant problem

工程设计中,采用精确的理论分析梁翼缘应力的不均匀分布规律不仅复杂而且代价高昂,而按初等梁理论的公式也能得到与真实应力峰值接

近的翼缘折算宽度,故通常用其代替翼缘实际宽度法进行分析,即用有效宽度来代替。对于有效宽度,国内外很多学者已做过研究^[1-5]。研究方法

收稿日期:2009-04-05.

基金项目:吉林省科技厅基础项目(20050531).

作者简介:秦绪喜(1976-),男,博士研究生.研究方向:道桥结构优化分析. E-mail:qinx29@yahoo.com.cn

通信作者:刘寒冰(1957-),男,教授,博士生导师.研究方向:道桥结构优化设计理论及应用.

E-mail:liuhb57@sina.com

主要有解析法计算、实验研究、有限元分析等,对各种影响翼缘有效宽度的因素进行分析,并提出了确定翼缘有效宽度的方法。基于这些研究结果,各国规范中对于翼缘有效宽度取值均有不同的技术规定。各国对单根 T 型梁与多根 T 型梁制定的有效分布宽度的共同特点有:①均不超过梁的中到中距离;②均为跨长的函数;③均用板厚的某个倍数加上加腋厚度。从目前来看,对于规范中这些特点的合理性论证不足。

作者将简支宽翼缘 T 梁翼缘部分简化为平面应力板,以辛弹性力学方法为基础^[6],利用腹板和翼缘板结合处的变形和静力平衡条件建立方程组,推导得到了简支 T 梁中的翼缘部分闭合多项式形式的有效宽度的表达式。

1 平面剪力滞分析

1.1 梁板的简化

考虑简支宽翼缘 T 梁桥(见图 1),当外荷载直接作用于肋板上而产生对称弯曲时,由于翼板厚度远小于梁的高度,可以不计梁翼的薄板弯曲,翼板中应力分布可认为是二维的平面问题。从梁中分出一部分,就成为在一个在端部具有某些约束,而在其边缘作用一剪力流荷载的平面应力板,如图 2 所示(取出外翼缘 ABCD 部分)。作用在腹板与翼缘交界处(AB)的剪力流荷载 $F(x)$ 可根据初等梁理论求得^[7]。

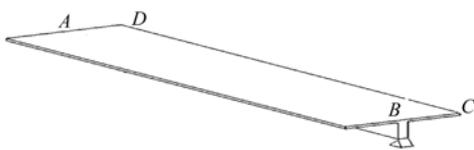


图 1 悬臂 T 梁桥示意图

Fig.1 Model for a T projecting beam

1.2 哈密顿对偶方程组的推导

基于前面的分析,上翼板可看作一个平面矩形域,如图 1 所示。令 E 、 μ 分别表示弹性模量和泊松比。平衡方程可表达为 xy 平面内的平面应力方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中: σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 分别为翼板上的正应力和切应力。

各项同性的应力应变关系为

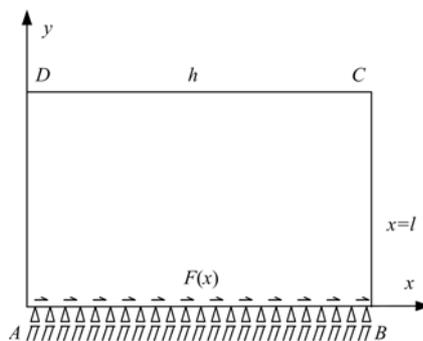


图 2 取出的一半翼缘示意图

Fig.2 Two-dimensional plane stress wide flange model for a T projecting beam

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu\sigma_y] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (2)$$

式中: ϵ_x 、 ϵ_y 和 γ_{xy} 分别为翼板上的线应变和切应变。

位移与应变的关系为

$$\epsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

式中: w 、 u 分别表示翼板上 x 向和 y 向的位移。

通过式(2)(3)消去应变项得

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu\sigma_y] \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{E}[\sigma_y + \mu\sigma_x] \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (4)$$

现在,控制方程(1)(4)包括 3 个应力项 (σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy}) 和 2 个位移项 (w 和 u),通过替换和简化可将式(1)和式(4)化为哈密顿对偶方程。首先,由式(4)中前两式将 σ_y 消去,则位移 w 可用 u 和 σ_x 表达为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1-\mu^2}{E}\sigma_x \quad (5)$$

由式(4)中第三式和式(1)中第一式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (7)$$

由式(1)和式(4)中第二式消去 σ_y 可得

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -E \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \quad (8)$$

这样,式(5)~式(8)可表达成如下的矩阵形式

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ u \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -E \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\mu \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (9)$$

上式即为哈密顿对偶方程。对于图2所示问题还应满足如下边界条件

$$\sigma_y = 0, \tau = 0 \quad (\text{当 } y = h \text{ 时}) \quad (10a)$$

$$u = 0, \tau = F(x) \quad (\text{当 } y = 0 \text{ 时}) \quad (10b)$$

$F(x)$ 可由初等梁理论求得。引入位移 w, u 的对偶变量 σ_x, τ_{xy} , 则原变量 q 和对偶变量 p 分别为

$$q = (w \ u)^T, \quad p = (\sigma_x \ \tau_{xy})^T \quad (11)$$

引入全状态向量 V

$$V = (q \ p)^T = (w \ u \ \sigma \ \tau)^T \quad (12)$$

则式(9)变为

$$\dot{V} = HV \quad (13)$$

若求解上面的方程,首先要讨论齐次线性微分方程(9)和两侧边的齐次侧边边界条件(14)的求解。

$$E \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \sigma = 0, \tau = 0 \quad (\text{当 } y = h \text{ 时}) \quad (14a)$$

$$u = 0, \tau = 0 \quad (\text{当 } y = 0 \text{ 时}) \quad (14b)$$

对方程(9)可由分离变量法求解,令

$$V(x, y) = \xi(x) \psi(y) \quad (15)$$

将式(15)带入式(9),可以得到

$$\xi(x) = e^{\eta x} \quad (16)$$

及本征方程

$$H\psi(y) = \eta\psi(y) \quad (17)$$

式中: η 为本征值,待求; $\psi(y)$ 为本征函数向量,它应满足侧边齐次边界条件(14)。根据文献[6]的证明思路,不难证明 H 为哈密顿型算子矩阵,于是任何一个全状态函数向量 V 总可以用本征解来展开,将其前有限项代入变分原理,即可给出问题的一个直接解法。

1.3 简支 T 梁作用两种荷载时的圣维南解

对于式(14)的齐次边界条件,存在零本征解及其约当型本征解。求解方程 $H\psi(y) = 0$, 可得

本问题的 2 个零本征值的本征解

$$\psi_0^1 = (1, 0, 0, 0)^T \quad (18)$$

$$\psi_0^2 = (0, -\mu y, E, 0)^T \quad (19)$$

当简支 T 梁作用满跨均布荷载和满跨线性荷载时,两侧边边界条件变为式(14a)和式(20)

$$u = 0, F(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{当 } y = 0 \text{ 时}) \quad (20)$$

根据文献[7]的推导思路,求解式(17)(14a)(20)可得

$$\psi^2 = \left[\frac{2(1+\mu)}{E} y - \frac{(2+\mu)}{2hE} y^2, 0, 0, 1 - \frac{y}{h} \right]^T \quad (21)$$

$$\psi^3 = \left(0, \frac{(2\mu+1)y^3}{6hE} - \frac{(\mu+1)^2 y^2}{2E} - \frac{h(\mu^2-1)y}{2E}, \frac{h\mu}{2} + (\mu+2)y - \frac{y^2}{h}, 0 \right)^T \quad (22)$$

$$\psi^4 = \left(\frac{(2\mu+3)y^4}{8h^3 E(2+3\mu)} - \frac{(3+\mu)(\mu+1)y^3}{2h^2 E(2+3\mu)} - \frac{3(\mu+1)^2 y^2}{4hE(2+3\mu)} + \frac{2(\mu+1)y}{E}, 0, 0, \frac{y^3}{h^3(2+3\mu)} - \frac{3(2+\mu)y^2}{2h^2(2+3\mu)} - \frac{3\mu y}{2h(2+3\mu)} + 1 \right)^T \quad (23)$$

由前面求解可分别得满足式(9)(10)的简支 T 梁作用满跨均布荷载的特解式和简支 T 梁作用满跨线性荷载的特解式为

$$V^2 = b \left[\psi^3 + x\psi^2 + \frac{1}{Eh} \left[\frac{x^2}{2} \psi_0^1 + \frac{x^3}{6} \psi_0^2 \right] \right] + V^1 \quad (24)$$

$$V^3 = \frac{2h^2(2+3\mu)a}{3} \left[\psi^4 + \frac{3}{h^2(2+3\mu)} (x\psi^3 + \frac{x^2}{2} \psi^2 + \frac{1}{Eh} \left[\frac{x^3}{6} \psi_0^1 + \frac{1}{24} x^4 \psi_0^2 \right]) \right] + V^2 - \frac{2h^2(2+3\mu)a}{3c} V^1 \quad (25)$$

式中:

$$V^1 = c \left(\psi^2 + \frac{1}{Eh} \left[x\psi_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \psi_0^2 \right] \right);$$

系数 a, b, c 由式(20)确定。

运用圣维南原理忽略非零本征值的本征解,则本问题的圣维南解可仅采用特解加零本征值的本征解。

$$V_i = V^i + \alpha_i v_0^1 + \beta_i v_0^2, \quad i = 2 \text{ 或 } 3 \quad (26)$$

式中: V_2 为简支 T 梁作用满跨均布荷载时的圣维南解; V_3 为简支 T 梁作用满跨线性荷载时的圣维南解;系数 α_i, β_i 可根据两端边界条件求得。

1.4 简支 T 梁作用满跨均布荷载的有效宽度

简支 T 梁作用满跨均布荷载模型如图 3 所示,截面如图 4 所示。

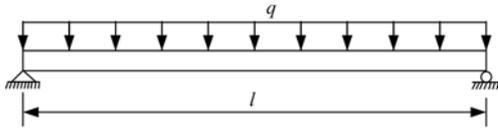


图 3 均布荷载模型

Fig. 3 Model under uniform loads

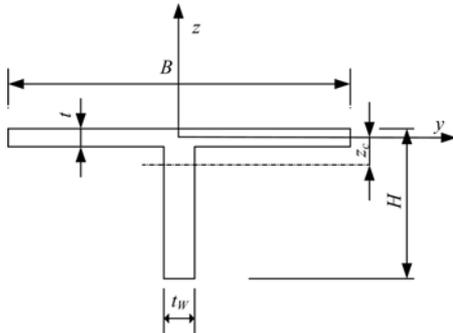


图 4 T 形梁截面图

Fig. 4 Cross-section of T beam

对于图 3 所受荷载, $F(x)$ 为线性荷载。根据初等梁理论可求得 $\tau = F(x) = \frac{(l/2 - x)ghz_c}{I} = bx + c$, 将 b, c 值代入式(26), 得简支 T 梁任意截面上的应力为

$$\sigma = \left\{ - \left[\frac{h\mu}{2} + (\mu + 2)y - \frac{y^2}{h} \right] + \frac{-x^2}{2h} + \frac{lx}{2h} + \alpha_e E \right\} \frac{ghz_c}{I} \quad (27)$$

当 $x = 0, x = l$ 时根据简支条件应有

$$\int_0^h \sigma_{x=0} dy = \int_0^h \sigma_{x=l} dy = 0 \quad (28)$$

经求解得 $\alpha_e E = 2h/3 + h\mu$ 。所以有

$$\sigma = \left\{ - \left[\frac{h\mu}{2} + (\mu + 2)y - \frac{y^2}{h} \right] + \frac{-x^2}{2h} + \frac{lx}{2h} + \frac{2h}{3} + h\mu \right\} \frac{ghz_c}{I} \quad (29)$$

有效翼缘宽度采用式(30)计算

$$b_e = \frac{t \int_0^h \sigma(x, y) dy}{t\sigma_{max}} \quad (30)$$

式中: b_e 为每侧翼缘的有效宽度; t 为翼缘的厚度; σ_{max} 为腹板与翼缘连接处的应力峰值。

将式(29)代入式(30)化简得

$$b_e = \frac{(lx - x^2)h}{4h^2/3 + h^2\mu + lx - x^2} \quad (31)$$

翼缘有效宽度之比 ψ 为

$$\psi = \frac{b_e}{h} = \frac{lx - x^2}{4h^2/3 + h^2\mu + lx - x^2} \quad (32)$$

1.5 简支 T 梁作用满跨线性荷载的有效宽度

简支 T 梁作用满跨线性荷载模型如图 5 所示,截面如图 4 所示。

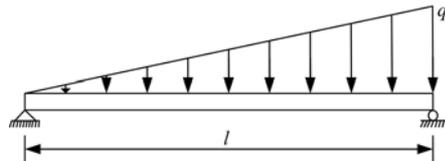


图 5 线性荷载模型

Fig. 5 Model under linear loads

对于图 5 所受荷载, 据初等梁理论得 $\tau = F(x) = \frac{(\ell^2/3 - x^2)ghz_c}{2I} = ax^2 + bx + c$, 将 a, b, c 值代入式(26), 得简支 T 梁任意截面上的应力为

$$\sigma = \left\{ \left[\frac{\ell^2}{3h} + \frac{1}{3}h(4 + 3\mu) - 2(2 + \mu)y + \frac{2y^2}{h} \right] x - \frac{x^3}{3h} + \alpha_e E \right\} \frac{ghz_c}{I} \quad (33)$$

据式(28)的边界条件得 $\alpha_e E = 0$, 所以有

$$\sigma = \left\{ \left[\frac{\ell^2}{3h} + \frac{1}{3}h(4 + 3\mu) - 2(2 + \mu)y + \frac{2y^2}{h} \right] x - \frac{x^3}{3h} \right\} \frac{ghz_c}{I} \quad (34)$$

将式(34)代入式(30)得

$$b_e = \frac{(\ell^2 - x^2)h}{h^2(4 + 3\mu) + \ell^2 - x^2} \quad (35)$$

翼缘有效宽度之比 ψ 为

$$\psi = \frac{b_e}{h} = \frac{\ell^2 - x^2}{h^2(4 + 3\mu) + \ell^2 - x^2} \quad (36)$$

2 验证

英国规范^[8] (BS 5400 1982) 给出了简支梁受均布荷载下钢桥和混凝土桥的有效宽度比 ψ 。为了验证本文的求解, 现将所得结果与英国规范作一比较, 见表 1 和表 2。

为对比规范与本文的相对误差, 作如下定义:

$$\zeta = \frac{\psi - \psi_1}{\psi_1} \times 100(\%) \quad (37)$$

式中: ψ, ψ_1 分别为本文有效宽度比和规范中有效宽度比。由表 1、表 2 可看到, 相对误差随着宽跨比 b/l 的增大而增大。由表 1 可见, 当 $b/l \leq 0.5$ 时, 相对误差小于 12.15%。由表 2 可见, 当 b/l

≤ 0.5 时,相对误差小于 8.11%。可知本文解与规范吻合较好,计算公式表达简单,可作为桥梁初期设计的简化计算公式。

表 1 均布荷载下简支钢桥有效宽度比 ψ

Table 1 ψ of simply supported steel bridge under uniform load

b/l	1/2 跨			1/4 跨		
	BS5400	本文	相对误差/%	BS5400	本文	相对误差/%
0.00	1.00	1.000	0.00	1.00	1.000	0.00
0.05	0.98	0.984	-0.41	0.98	0.979	0.10
0.10	0.95	0.940	1.06	0.93	0.922	0.87
0.20	0.81	0.798	1.50	0.77	0.747	3.08
0.30	0.66	0.637	3.61	0.61	0.568	7.39
0.40	0.50	0.496	0.81	0.46	0.425	8.24
0.50	0.38	0.387	-1.81	0.36	0.321	12.15

注:本文解 $\mu=0.25$,以下同。

表 2 线性荷载下简支混凝土桥有效宽度比 ψ

Table 2 ψ of simply supported reinforced concrete bridge under linear load

b/l	1/2 跨			1/4 跨		
	BS5400	本文	相对误差/%	BS5400	本文	相对误差/%
0.00	1.00	1.000	0.00	1.00	1.000	0.00
0.02	0.99	0.997	-0.70	0.99	0.996	-0.60
0.05	0.98	0.985	-0.51	0.98	0.980	0.00
0.10	0.95	0.943	0.74	0.93	0.926	0.43
0.20	0.81	0.806	0.50	0.77	0.757	1.72
0.30	0.65	0.649	0.15	0.60	0.581	3.27
0.40	0.50	0.510	-1.96	0.46	0.439	4.78
0.50	0.38	0.399	-4.76	0.36	0.333	8.11

3 结束语

以辛弹性力学方法为基础,将简支宽翼缘 T 梁翼缘部分简化为平面应力板,利用腹板和翼缘板结合处的变形和静力平衡条件建立方程组,得到了简支 T 梁在满跨均布荷载与线性荷载作用下翼缘部分闭合多项式形式的有效宽度的表达式。并将本文方法计算结果与英国规范 BS5400 中的翼缘有效宽度取值作比较,验证了解析解表达式的正确性,本文方法简洁有效,丰富了简支 T 梁桥有效宽度的理论分析并简化了计算。

参考文献:

[1] 李立峰,邵旭东,程翔云,等. 变截面长悬臂宽箱梁桥翼缘有效宽度研究[J]. 重庆交通学院学报, 2004,23(2):1-5.
Li Li-feng, Shao Xu-dong, Cheng Xiang-yun, et al. Research of efficient width of flange in wide flanged girder with variable cross section and long over-hanging flange[J]. Journal of Chongqing Jiao Tong University, 2004, 23(2): 1-5.

[2] 聂建国,田春雨. 简支组合梁板体系有效宽度分析[J]. 土木工程学报, 2005, 38(2): 8-12.
Nie Jian-guo, Tian Chun-yu. Effective widths of simply supported composite beams with transverse end girders [J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(2): 8-12.

[3] 魏红一,胡世德. 桥梁施工方法与主梁有效宽度[J]. 结构工程师, 2006, 22(2): 21-24.
Wei Hong-yi, Hu Shi-de. Bridge construction method and effective distribution width of main girder [J]. Structural Engineers, 2006, 22(2): 21-24.

[4] 张士铎. 桥梁设计理论-荷载横向分布、弯桥、有效宽度及剪力滞[M]. 北京:人民交通出版社, 1984.

[5] 刘殿忠,刘寒冰. 钢-轻骨料混凝土组合梁的有效宽度分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(2): 232-236.
Liu Dian-zhong, Liu Han-bing. Analysis for effective width of composite steel-concrete beam with lightweight aggregate[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39(2): 232-236.

[6] 姚伟岸,钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京:高等教育出版社, 2002.

[7] 刘寒冰,秦绪喜,焦玉玲. 悬臂 T 梁剪力滞现象的圣维南解析解[J]. 吉林大学学报:工学版, 2009, 39(3): 691-696.
Liu Han-bing, Qin Xu-xi, Jiao Yu-ling. Analytic solutions of Saint-Venant problem in shear lag effect of T cantilever beam[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2009, 39(3): 691-696.

[8] British Standard Institution. BS 5400, Parts 3, 4, 5. Steel, Concrete and composite bridges[S]. 1982.