

# 基于改进蒙特卡洛法的框架强柱弱梁可靠度分析

蔡斌<sup>1,2</sup>, 刘昕晖<sup>2</sup>, 董心<sup>2</sup>

(1. 吉林建筑工程学院,长春 130021; 2. 吉林大学 机械科学与工程学院,长春 130022)

**摘要:**针对蒙特卡洛方法存在的计算量大,计算时间长的缺点,借助曲线拟合的思想,提出了改进的蒙特卡洛可靠度分析方法。基于该方法并考虑计算模式、材料强度、几何尺寸的随机性,对抗震设计规范所提出的抗震概念设计进行了讨论,分析了钢筋混凝土结构的节点强柱弱梁可靠性。得出了不同抗震等级下节点强柱弱梁设计的可靠度,最后确定了2010版建筑抗震设计规范中框架柱端弯矩增大系数的调整对强柱弱梁的失效概率的影响规律,新规范调整后的柱端弯矩增大系数使强柱弱梁设计可靠性大大增加,达到了规范调整的目的。

**关键词:**可靠度;强柱弱梁;蒙特卡洛方法;概念设计

**中图分类号:**O344    **文献标志码:**A    **文章编号:**1671-5497(2012)Sup. 1-0143-04

## Reliability analysis for strong column weak beam design of frames based on improved Monte Carlo simulation method

CAI Bin, LIU Xin-hui, DONG Xin

(1. Jilin Institute of Architecture and Civil Engineering, Changchun 130021; 2. College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China; 3. China State Key Laboratory of Automobile Dynamic Simulation, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:** To overcome shortcomings of large amount of computational efforts and long computation time existing in Monte Carlo simulation for system reliability analysis, an improved method was proposed in the light of curve fitting. Uncertainty of calculation, geometric size and concrete strength were considered as random variables, seismic concept design issued by the national Code for Seismic Design of Buildings (GB50011-2010) were discussed. The strong beam weak column reliability of RC structure was analysed by enhanced Monte Carlo simulation in the light of curve fitting. Influence of moment augment factor of column issued by the national Code for Seismic Design of Buildings on strong beam weak column reliability were discussed. Result indicates that new moment augment factor of column improve the strong beam weak column reliability of reinforced concrete structure.

**Key words:** reliability; strong column weak beam; Monte Carlo simulation; concept design

---

收稿日期:2012-03-10.

基金项目:吉林大学“985工程”项目;吉林省科技厅基金项目(20100180);吉林省教育厅科研项目(吉教科合字[2011]178号);吉林建筑工程学院青年基金项目(J20111035).

作者简介:蔡斌(1978-),男,讲师,博士.研究方向:疲劳与断裂,计算固体力学. E-mail:caibin@jliae.edu.cn

通信作者:董心(1956-),男,教授.研究方向:生物固体力学,计算固体力学. E-mail:dongxin@jlu.edu.cn

抗震设计主要包括:抗震计算、抗震措施和概念设计。抗震概念设计<sup>[1]</sup>是根据地震灾害和工程经验等所形成的基本设计原则和设计思想,进行建筑和结构的总体布局应确定细部构造的过程。概念设计的思想是把地震作用的规律性和不确定性结合起来,设计时着眼于建筑结构的总体反应,从设计一开始就把握设计的本质问题。强剪弱弯、强柱弱梁、强节点弱构件都是概念设计理念<sup>[2]</sup>。其中强柱弱梁设计方法是一个重要的概念设计方法,这样可以保证梁柱节点处柱端弯矩大于梁端弯矩,当遭遇强烈地震时可以保证梁端首先屈服,塑性铰首先出现在梁中,这样可以使柱子具有安全储备,保证了柱子也有一定的延性。实现了抗震规范中的结构宜有多道防线的要求。强柱弱梁设计<sup>[3-5]</sup>的框架梁属于第一道防线,用梁的变形来耗能,保证了柱处于第二道防线。现行抗震规范通过不同的柱端弯矩增大系数来实现强柱弱梁。但是由于各种不确定性因素的存在,在梁柱节点也存在着强梁弱柱的可能性。最新抗震规范 GB50011-2010 虽然调整了柱端弯矩增大系数,但是对应的强柱弱梁可靠度没有给出。蒙特卡洛方法是可靠度计算的一种传统方法,但是传统蒙特卡洛法存在计算量大、计算时间长的缺点,本文提出了改进的蒙特卡洛方法,并且考虑计算模式、材料强度、几何尺寸的随机性分析梁柱节点强柱弱梁可靠性。

## 1 改进蒙特卡洛法

### 1.1 失效概率函数的构造

设功能函数为

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

可靠度指标为

$$\beta = u_z / \sigma_z \quad (2)$$

结构的失效概率也可用可靠度指标表示为

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (3)$$

式中:  $\Phi(\cdot)$  表示服从标准正态分布的分布函数。

将功能函数扩展为参数化的功能函数<sup>[6]</sup>,形式如下:

$$Z(\lambda) = Z - \mu_z(1 - \lambda) \quad (4)$$

式中:  $0 \leq \lambda \leq 1$ 。并且根据式(4)可以确定  $Z = Z(1)$ , 由  $E[Z(\lambda)] = \lambda\mu_z$ ,  $Var[Z(\lambda)] = \sigma_z^2$ , 可表示为可靠度指标  $\beta(\lambda) = \lambda\beta$ , 则结构的失效概率为

$$p_f(\lambda) = \Pr_{ob}(Z(\lambda) \leq 0) = \Phi(-\lambda\beta) \quad (5)$$

若  $p_f = p_f(1)$  是一个很小量, 例如失效概率小于

$10^{-3}$ , 根据参考文献<sup>[7]</sup>, 失效概率的表达式为:

$$p_f(\lambda) = \Phi(-\lambda\beta) = \frac{1}{\lambda\beta} - \frac{1}{(\lambda\beta)^3} + \frac{3}{(\lambda\beta)^5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} \times 1 \times 3 \times 5 \times (2n+1)}{(\lambda\beta)^{2n-1}} \phi(\lambda\beta) + R_n \quad (6)$$

其中余项:

$$R_n = (-1)^{n+1} \times 1 \times 3 \times \dots \times (2n+1) \int_x^{\infty} \frac{\phi(\lambda\beta)}{t^{2n+2}} dt \quad (7)$$

式中:  $\phi$  为标准正态分布的概率密度函数, 取展开式的前 4 项可得

$$p_f(\lambda) = \Phi(-\lambda\beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\lambda\beta} - \frac{1}{(\lambda\beta)^3} + \frac{3}{(\lambda\beta)^5} - \frac{1}{(\lambda\beta)^7} \right) \exp\left\{-\frac{\beta^2\lambda^2}{2}\right\} \quad (8)$$

模仿式(8)的形式给出失效概率的函数表达式, 通过对式(8)的简化, 设结构的失效概率函数为

$$p_f(\lambda) \approx q \exp\{-a(\lambda - b)^c\} \quad (9)$$

其中  $q, a, b, c$  为未知待定参数, 假设不同  $\lambda$  值, 即参数  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_M \leq 1$ , 通过式(4)确定不同的功能函数, 然后通过蒙特卡洛模拟计算出相应的失效概率为:  $p_f(\lambda_1), p_f(\lambda_2), \dots, p_f(\lambda_m)$ 。 $\lambda_i$  和  $p_f(\lambda_i)$  即为曲线拟合的试验数据。 $\lambda$  为自变量,  $p_f(\lambda)$  为因变量<sup>[8]</sup>。

### 1.2 曲线拟合

借助曲线拟合的方法确定待定参数  $q, a, b, c$  就是使均方差函数(10)取到最小值的优化问题。

$$F(q, a, b, c) = \sum_{j=1}^M (\log \hat{p}_f(\lambda_j) - \log q + a(\lambda_j - b)^c)^2 \quad (10)$$

失效概率函数  $p_f(\lambda)$  确定参数  $q, a, b, c$  的问题将转化为如下非线性最小二乘问题<sup>[9-10]</sup>

$$F = \sum_{j=1}^M (\log \hat{p}_f(\lambda_j) - \log q + a(\lambda_j - b)^c)^2 = r(x)^T r(x) \quad (11)$$

式中:  $r(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_M(x))^T$  为  $x$  的非线性函数, 称为残量函数。因为函数  $r(x)$  二阶连续可微, 其 Gauss-Newton 迭代公式如下

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta^{(k)} \quad (12)$$

式中:  $\delta^{(k)}$  为  $x^{(k)}$  向最优解趋近的修正量,

$$\delta = -(J_k^T J_k + \mu I)^{-1} J_k^T r_k \quad (13)$$

$J_k$  为  $f(x)$  的 Jacobian 矩阵。当  $J_k$  奇异或者坏条件时, Gauss-Newton 计算方法可能存在计算上的

困难, 这时可以应用 Levenberg-Marquardt 对 Gauss-Newton 进行修正。最后通过 Levenberg-Marquardt 优化方法拟合出结构的失效概率函数  $p_f(\lambda) \approx q \exp\{-a(\lambda - b)^c\}$ , 得到具体的  $q, a, b, c$  值, 进而求出结构失效概率函数。

## 2 强柱弱梁可靠度计算

最新国家建筑抗震设计规范(GB50011—2010)通过调整柱端弯矩增大系数实现强柱弱梁的设计概念。规定一、二、三、四级抗震设计框架在梁柱节点处, 除框架顶层和柱轴压比小于 0.15 者及框支梁与框支柱的节点外, 柱端组合的弯矩设计值应符合下式要求:

$$\sum M_c = \eta_c \sum M_b \quad (14)$$

一级框架结构和 9 度的一级框架可不符合上式要求, 但应符合下式要求:

$$\sum M_c = 1.2 \sum M_{bua} \quad (15)$$

$M_b$  为节点左右梁端截面逆时针或顺时针方向组合的弯矩设计值之和, 一级框架节点左右梁端均为负弯矩时, 绝对值较小的弯矩应取零;  $M_c$  为节点上下柱端截面顺时针或逆时针方向组合的弯矩设计值之和;  $M_{bua}$  为节点左右梁端截面反时针或顺时针方向实配的正截面抗震弯矩承载力所对应的弯矩之和, 根据实配钢筋面积和材料强度标准值确定。 $\eta_c$  为框架柱端弯矩增大系数, 2010 版抗震规范之前对于一级框架结构  $\eta_c$  取 1.4, 二级框架结构取 1.2, 三级框架结构取 1.1。2010 版抗震规范对柱端弯矩增大系数做了调整, 一、二、三及框架结构分别取 1.7、1.5、1.3。对于一级框架结构和 9 度的一级框架当梁的实配钢筋不超过计算钢筋的 10%, 并考虑楼板钢筋及钢筋的超强影响,  $M_{bua}$  往往要超过  $M_b$  的 1.65 倍, 相应的公式(15)可以改写为公式(16)

$$\sum M_c \approx 2 \sum M_b \quad (16)$$

构件荷载和抗力之间表达式可以表示为:

$$S \leq \frac{R}{\gamma_{RE}} \quad (17)$$

$$S = \gamma_G S_{GE} + \gamma_{Eh} S_{Ehk} + \gamma_{Ev} S_{Evk} + \psi_w \gamma_w S_{wk} \quad (18)$$

式中:  $S$  为构件荷载设计值, 可以是  $\sum M_b$  和  $\sum M_c$ , 具体取值见公式(17);  $R$  为构件抗力设计值;  $\gamma_{RE}$  为承载力抗震调整系数, 根据抗震规范,

相关取值见表 1。

表 1 承载力抗震调整系数  
Table 1 Anti-seismic bearing capacity factor

结构构件	受力状态	
梁	受弯	0.75
轴压比小于 0.15 柱	偏压	0.75
轴压比不小于 0.15 柱	偏压	0.80
抗震墙	偏压	0.85
各类构件	受弯、受剪	0.85

强柱弱梁的可靠度可以由下面的极限状态方程来表示:

$$Z = R_{M_c} - R_{M_b} \quad (19)$$

式中:  $R_{M_c}$  为柱端抗弯承载力, 统计资料<sup>[11]</sup>显示其符合对数正态分布, 而且设计值与标准值的比值为  $R_{M_c}^d / R_{M_c}^k = 0.943$ , 平均值与标准值的比值为  $\bar{R}_{M_c} / R_{M_c}^k = 1.16$ , 变异系数  $\delta_{M_c} = 0.13$ 。 $R_{M_b}$  为梁端抗弯承载力, 其也符合对数正态分布, 而且设计值与标准值的比值  $R_{M_b}^d / R_{M_b}^k = 0.91$ , 平均值与标准值的比值为  $\bar{R}_{M_b} / R_{M_b}^k = 1.13$ , 变异系数  $\delta_{M_b} = 0.10$ 。由式(17)可知:

$$S_c \leq \frac{R_{M_c}^d}{\gamma_{RE}} \quad (20)$$

$$S_d \leq \frac{R_{M_b}^d}{\gamma_{RE}} \quad (21)$$

取(14)中  $\sum M_c = S_c$ ,  $\sum M_b = S_d$ , 得:

$$R_{M_c}^d = \frac{\gamma_c \eta_c R_{M_b}^d}{\gamma_b} \quad (22)$$

式中:  $\gamma_c = 0.8$ ,  $\gamma_b = 0.75$ , 并且由于上面得到设计值、标准值以及平均值、标准值之间的比例关系, 代入式(22)可以得到柱端弯矩平均值与梁端弯矩平均值之间的比例关系:

$$\bar{R}_{M_c} = 0.991 \frac{\gamma_c}{\gamma_b} \eta_c \bar{R}_{M_b} \quad (23)$$

得到柱端弯矩平均值与梁端弯矩平均值之间的关系之后就可以应用改进蒙特卡洛方法计算出框架结构强柱弱梁的失效概率。计算步骤如下<sup>[8]</sup>:

(1) 根据公式(23)得到柱端弯矩与梁端弯矩平均值之间的关系, 产生蒙特卡洛方法所需要的计算样本。

(2) 改造公式(19)得到参数化功能函数  $Z(\lambda) = R_{M_c} - R_{M_b} - \mu_z(1 - \lambda)$ 。

(3) 应用改进蒙特卡洛方法拟合出失效概率

函数  $P_f(\lambda)$ 。

(4) 带入  $\lambda = 1$  计算出结构的失效概率。

根据以上可靠度计算方法得到计算结果列于表 2 中。

**表 2 可靠度指标**  
**Table 2 Reliability index**

$\eta_c$	1.7	1.5	1.3
$\beta$	2.691	1.925	1.049
$P_f$	0.0036	0.0271	0.1471
$\eta_c$	1.4	1.2	1.1
$\beta$	1.502	0.559	0.026
$P_f$	0.0665	0.2881	0.4896

对于一级框架结构和 9 度的一级框架可靠度指标  $\beta = 3.69$ , 失效概率  $P_f = 0.0001$ 。

### 3 结 论

(1) 应用改进蒙特卡洛方法可以快速准确计算出钢筋混凝土框架结构强柱弱梁可靠度, 并且该方法可以应用到实际结构的可靠度计算中。

(2) 考虑各种不确定因素的情况下, 按照 2008 版抗震规范设计的钢筋混凝土框架结构节点强柱弱梁失效概率为: 一级框架结构  $P_f = 0.0665$ ; 二级框架结构  $P_f = 0.2881$ ; 三级框架结构  $P_f = 0.4896$ 。当  $\eta_c$  稍小时强柱弱梁可靠度指标明显偏低, 可能在遭遇强烈地震时造成强梁弱柱的发生, 使结构发生脆性破坏。

(3) 按照最新抗震规范 GB50011—2010 设计钢筋混凝土框架结构节点强柱弱梁失效概率为: 一级框架结构  $P_f = 0.0036$ ; 二级框架结构  $P_f = 0.0271$ ; 三级框架结构  $P_f = 0.1471$ 。强柱弱梁可靠度明显提高, 发生强梁弱柱破坏的概率大大降低, 达到了规范调整的目的。

### 参考文献:

[1] GB50011—2010 建筑抗震设计规范[S].

- [2] GB50010—2010 混凝土结构设计规范[S].
- [3] 龚思礼. 建筑抗震设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994.
- [4] Dooley K L, Bracci J M. Seismic evaluation of column-to-beam strength ratio in reinforced concrete frames[J]. ACI Structural Journal, 2001, 98(6): 843-851.
- [5] 袁贤讯, 易伟建. 钢筋混凝土框架“强柱弱梁”及轴压比限制的概率分析[J]. 重庆建筑大学学报, 2000, 22(3): 64-68.  
Yuan xian-xun, Yi wei-jian. Probability analysis on “strong beam and weak beam” and axial compression ratio in RC frame[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2000, 22(3): 64-68.
- [6] Naess A, Leira B J, Batsevych O. System reliability analysis by enhanced Monte Carlo simulation[J]. Structural Safety, 2009, 31: 349-355.
- [7] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions[M]. New York : Dover Publications Inc., 1963.
- [8] 孟广伟, 蔡斌. 曲线拟合与蒙特卡洛法结合的结构可靠度分析方法[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2010, 40(增刊 1): 293-296.  
Meng guang-wei, Cai bin. New method for structural reliability analysis combine curve fitting with Monte Carlo simulation[J]. Journal of Jilin University Engineering and Technology Edition, 2010, 40(Sup. 1): 293-296.
- [9] 栗塔山. 最优化计算原理和算法程序设计[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.
- [10] 孙文瑜, 徐成贤, 朱德通. 最优化方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [11] 沈在康. 混凝土结构设计新规范应用讲评[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1988: 24-28.