

文章编号:1671-5497(2006)Suppl.2-0001-05

# 短纤维增强金属基复合材料弹性模量临界值计算预测

金 满,江中浩,连建设

(吉林大学 材料科学与工程学院,长春 130022)

**摘要:**基于短纤维增强金属基复合材料弹性模量理论模型,提出了弹性模量临界值的定义,并建立了可用于预测计算的纤维临界长径比和材料参数之间的解析函数。将与曲线拐点切线和最大值水平直线交点相对应的长径比值定义为纤维临界长径比,将与此相对应的函数值定义为弹性模量临界值。计算结果表明,纤维临界长径比随纤维弹性模量的增加而增加,随基体弹性模量和纤维体积分数的增加而降低。

**关键词:**复合材料;金属基复合材料;短纤维;弹性模量;临界长径比

**中图分类号:**TB331      **文献标识码:**A

## Calculation and prediction of critical elastic modulus of short fiber-reinforced metal matrix composites

Jin Man, Jiang Zhong-hao, Lian Jian-she

(College of Materials Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:**Based on the theoretical model for the elastic modulus of short fiber-reinforced composite, the critical elastic modulus of short fiber-reinforced metal matrix composites was proposed and an analytical expression for the relationship between the critical elastic modulus and the critical aspect ratio of the fiber and other material parameters was derived. The critical aspect ratio of the fiber is defined as the cross-point of the tangent value of the inflexion and the asymptote of the maximum elastic modulus. The calculations reveal that the critical aspect ratio of the fiber increased with increasing the elastic modulus of the fiber and decreased with increasing the elastic modulus of the matrix and the volume fraction of the fiber.

**Key words:**composite material; metal matrix composites; short fiber; elastic modulus; critical aspect ratio

弹性模量是短纤维增强金属基复合材料最重要的力学性能指标之一。宏观力学试验证明,复合材料的弹性模量直接与基体和纤维的弹性模量、纤维的体积分数及纤维的长径比等材料参数有关。为了对复合材料进行进一步的理论研究及

为复合材料设计提供可靠的预测数据,人们提出了很多弹性模量和材料参数之间的数学表达式。Kelly<sup>[1]</sup>根据剪切滞后理论给出了弹性模量理论表达式,Clyne 和 Karbhari 等人<sup>[2,3]</sup>通过对根应力的修正,提出了弹性模量计算式。Withers 和

收稿日期:2005-09-12.

基金项目:教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20010183019).

作者简介:金满(1949-),男,副教授.研究方向:材料性能计算机模拟. E-mail:jinman@jlu.edu.cn

通讯联系人:江中浩(1956-),男,教授,博士生导师.研究方向:复合材料理论模型. E-mail:jzh@jlu.edu.cn

Sharma 等人<sup>[4-7]</sup>也提出了相应的弹性模量理论分析式, Jiang Zhong-hao 等人<sup>[8-10]</sup>在详细分析弹性应力场的基础上, 提出了更准确的弹性模量解析函数。试验和理论曲线都表明纤维的长径比对复合材料的弹性模量影响极大, 并存在临界长径比和与之相对应的临界弹性模量。准确预测这一临界值, 对材料结构设计具有重要的指导意义。到目前为止, 尚未看到有关弹性模量临界值的准确定义及其求解方法的详细论述。本文首先确定了弹性模量临界值的数学定义, 然后采用函数代换法, 用容易运算的可分离函数取代原函数, 完成弹性模量临界值的预测计算。

## 1 弹性模量理论模型及临界值定义

### 1.1 理论模型

根据短纤维增强金属基复合材料应力场积分表达式, 对基体应变微分可获得弹性模量解析函数<sup>[9]</sup>, 即

$$E_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_m} = (1-f)E_m + fE_f \frac{4fs^2 E_m + 2E_m}{E_f + 4fs^2 E_m + E_m} \quad (1)$$

式中:  $E_c$ 、 $E_f$ 、 $E_m$  分别为复合材料、纤维、基体的弹性模量, GPa;  $f$  为纤维体积分数;  $s$  为纤维长度与直径之比。

理论模型式(1)与试验值非常吻合, 复合材料弹性模量( $E_c$ )理论曲线与纤维长径比( $s$ )的关系曲线, 如图 1 所示。

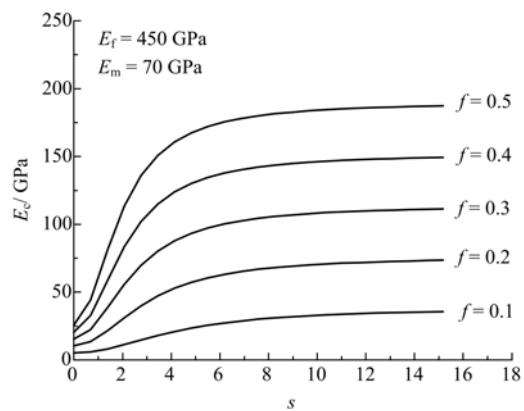


图 1 复合材料弹性模量与纤维长径比关系曲线  
Fig. 1 Variation of the elastic modulus of the composite with the length-diameter ratio of the fiber for different fiber volume fractions

### 1.2 弹性模量临界值定义

从图 1 可以看出, 随  $s$  的增大, 弹性模量开始增加很快, 但达到一定值后其增长率迅速降低, 长

径比超过 10 以后几乎不再增加, 说明必然存在一个临界值。要求解这一临界值, 首先需要确立满足物理意义的临界值定义。为了便于数学分析, 将自变量  $s$  的取值范围进一步扩展, 获得如图 2 所示的理论曲线。曲线的材料参数值为:  $E_f = 450$  GPa,  $E_m = 70$  GPa,  $f = 0.3$ 。当长径比无穷大时, 曲线存在渐近线  $L_2$ , 弹性模量取得最大值, 其增长率为零。当长径比等于零时, 曲线有一个最小值。故在区间  $(0, \infty)$  内必有拐点  $P$ , 此处弹性模量增长率最大。从增长率最大减少为零增长的转折点就是要找的临界点。因此把拐点  $(s_0, E_0)$  的切线  $L_1$  和渐近线  $L_2$  的交点  $M$  的横坐标  $s_k$  以及相对应的弹性模量值  $E_k$  定义为临界长径比和临界弹性模量, 如图 2 所示。求解弹性模量的临界值实际上就是求纤维临界长径比  $s_k$ 。

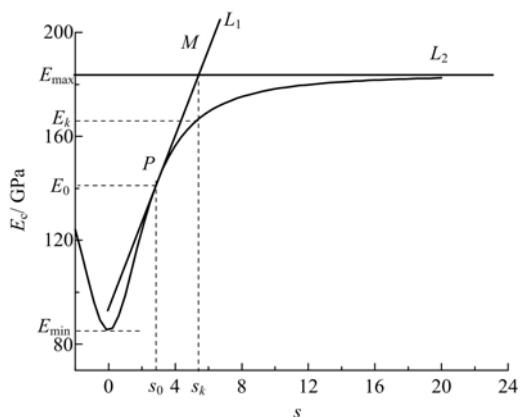


图 2 计算纤维临界长径比示意图

Fig. 2 Illustration of the calculation of the critical aspect ratio of the fiber

## 2 模型的函数代换

### 2.1 代换函数推导

复合材料弹性模量理论模型的函数表达式(1)比较复杂, 难以获得解析解。为运算简便, 对模型(1)进行函数代换。

引进函数  $u(s)$ , 根据函数变化规律, 令

$$E_c = E_{\max} - Au(s) \quad (2)$$

从图 2 的理论模型曲线可得边界条件

$$E_c|_{s \rightarrow \infty} = E_{\max} \quad (3)$$

$$E_c|_{s=0} = E_{\min} \quad (4)$$

把边界条件式(3)和(4)代入式(2)得

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Au(s) = 0$$

$$Au(0) = E_{\max} - E_{\min}$$

满足上式最简单形式是,  $A = E_{\max} - E_{\min}$ ,  $u(0) = 1$ ,

故获得如下代换函数

$$E_c = E_{\max} - (E_{\max} - E_{\min})u(s) \quad (5)$$

函数式(5)的具体形式取决于  $u(s)$ , 将式(5)整理得

$$u(s) = \frac{E_{\max} - E_c}{E_{\max} - E_{\min}} \quad (6)$$

$u(s)$  是无量纲函数。选取一组材料参数 ( $E_f = 450$  GPa,  $E_m = 70$  GPa,  $f = 0.3$ ) 代入原函数式(1), 用 Origin 非线性拟合程序直接读出该材料的  $E_{\max}$  和  $E_{\min}$  的近似值及若干个  $E_c$  函数值(可取 60 个数据)。将以上数据代入式(6), 绘出  $u(s)$  的数据点分布图, 如图 3 所示。为确认函数的对称性,  $s$  取值范围选定在  $[-20, 20]$ 。

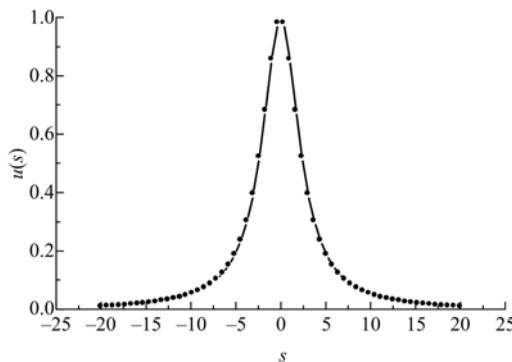


图 3 函数  $u(s)$  数据点分布

Fig. 3 Calculated data point distribution by using the  $u(s)$  function

由图 3 可知,  $u(s)$  是对称函数,  $s = 0$  和  $s \rightarrow \infty$  时一阶导数为零。在  $0 \leq s < \infty$  范围内满足此项条件的最简微分方程为

$$\frac{du}{ds} = -ksu^n, k \neq 0 \quad (7)$$

边界条件为

$$u(s)|_{s=0} = 1 \quad \lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 0 \quad (8)$$

$k$  为待定系数。解方程(7)就可以得到函数  $u(s)$ 。下面求当指数  $n$  取何值时所得函数  $u(s)$  最逼近图 3 的理论数据点。用 Mathematica 程序求得图 3 数据点的导数值, 代入式(7)并用线性试探法得  $n=2$ , 再对式(7)两边积分得

$$u(s) = \frac{1}{\frac{k}{2}s^2 + C}$$

代入边界条件式(8)得,  $C=1$ 。令  $K=2/k$ , 得

$$u(s) = \frac{1}{Ks^2 + 1}$$

将上式代入式(5)得弹性模量代换函数, 记为  $E_{cr}$

$$E_{cr} = E_{\max} - \frac{E_{\max} - E_{\min}}{Ks^2 + 1} \quad (9)$$

式中:  $E_{\max}$ 、 $E_{\min}$ 、 $K$  是与  $s$  无关的待定常数。

## 2.2 代换函数检验

用式(1)解出  $E_c$  的理论值, 得到数据点  $(s_i, E_{ci})$ , 然后以式(9)作为拟合函数对理论数据点进行拟合, 可获得待定常数  $E_{\max}$ 、 $E_{\min}$ 、 $K$  的值。随机选取两种材料, 其材料参数和待定值如表 1 所示。

表 1 材料参数及模拟获得的代换函数常数值

Table 1 Material parameters and the simulated constant values of replacement function

材料	$E_f$ /GPa	$E_m$ /GPa	$f$	$E_{\max}$ /GPa	$E_{\min}$ /GPa	$K$
A	500	65	0.4	239	85.1	0.1841
B	350	75	0.2	130	84.7	0.1412

利用表 1 数据分别绘出两种材料 A 和 B 的代换函数模拟曲线并与理论数据比较, 结果表明代换函数  $E_{cr}$  曲线与理论数据点完全吻合, 如图 4 所示。图中数据点  $i=30$ 。

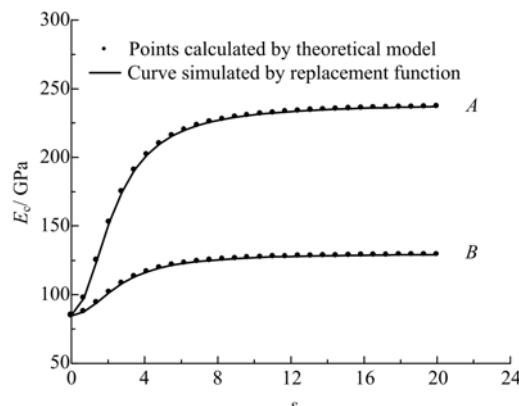


图 4 理论模型与代换函数计算值比较

Fig. 4 Comparison of the calculated elastic modulus of the composite by the analytical model with that by using the replacement function

## 3 纤维长径比临界值求解

根据临界长径比的定义, 首先求解代换函数  $E_{cr}$  的拐点。对式(9)求导, 得

$$\frac{dE_{cr}}{ds} = 2K(E_{\max} - E_{\min}) \frac{s}{(Ks^2 + 1)^2} \quad (10)$$

求二阶导数, 得

$$\frac{d^2E_{cr}}{ds^2} = 2K(E_{\max} - E_{\min}) \frac{1 - 3Ks^2}{(Ks^2 + 1)^3}$$

令  $\frac{d^2E_{cr}}{ds^2} = 0$ , 解得拐点坐标  $s_0 = \frac{1}{\sqrt{3K}}$ ,  $E_0 =$

$$\frac{E_{\max} + 3E_{\min}}{4}$$

可写出拐点的切线方程

$$E_{\text{cr}} = \frac{dE_{\text{cr}}}{ds}(s_0)(s - s_0) + E_0 \quad (11)$$

将  $s_0 = \frac{1}{\sqrt{3K}}$  代入式(10), 得拐点处的一阶导数

值, 即

$$\frac{dE_{\text{cr}}}{ds}(s_0) = \frac{9(E_{\max} - E_{\min})}{8\sqrt{3}}\sqrt{K}$$

代入式(11), 得拐点切线  $L_1$  (见图2) 的方程

$$E_{\text{cr}} = \frac{9(E_{\min} - E_{\max})}{8\sqrt{3}}\sqrt{K}s + \frac{9E_{\min} - E_{\max}}{8} \quad (12)$$

渐近线  $L_2$  的直线方程为

$$E_{\text{cr}} = E_{\max} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 解得两条直线交点的长径比临界值  $s_k$  为

$$s_k = \sqrt{\frac{3}{K}} \quad (14)$$

上式中  $K$  是与材料参数  $E_f, E_m, f$  有关的常数, 因此需要建立它们之间的关系式。

假设理论模型和代换函数相等, 即  $E_c = E_{\text{cr}}$ , 根据式(1), (9)有

$$(1-f)E_m + fE_f \frac{4fs^2E_m + 2E_m}{E_f + 4fs^2E_m + E_m} = \\ E_{\max} - \frac{E_{\max} - E_{\min}}{Ks^2 + 1}$$

因为  $K$  与  $s$  无关, 在任意给定  $s$  值情况下都可求得  $K$  值。令  $s = 1$ , 整理得

$$E_m + \frac{f(4fE_m + E_m)(E_f - E_m)}{E_f + 4fE_m + E_m} = \\ E_{\max} - \frac{E_{\max} - E_{\min}}{K + 1} \quad (15)$$

如果知道  $E_{\min}$  和  $E_{\max}$  的参数表达式, 就可解得  $K$ 。故利用式(1), 令  $s = 0$ , 得

$$E_{\min} = E_c(0) = \frac{fE_m(E_f - E_m)}{E_f + E_m} + E_m \quad (16)$$

对式(1)求极限, 得

$$E_{\max} = \lim_{s \rightarrow \infty} E_c(s) = f(E_f - E_m) + E_m \quad (17)$$

把式(16)、(17)代入式(15)解得  $K$ , 即

$$K = \frac{4fE_m}{E_f + E_m} \quad (18)$$

将  $K$  的表达式(18)代入式(14), 最终获得纤维临界长径比  $s_k$  的材料参数表达式, 即

$$s_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{E_f + E_m}{fE_m}} \quad (19)$$

把式(19)和式(16)、(17)代入式(9)可得相对应的弹性模量临界值  $E_k$ , 即

$$E_k = \frac{f(E_f - E_m)(3E_f + 4E_m)}{4(E_f + E_m)} + E_m \quad (20)$$

## 4 讨论

### 4.1 理论模型和代换函数的相等性

本文引进的代换函数实际上与理论模型完全相等, 即

$$E_{\text{cr}}(s) = E_c(s)$$

代换函数表达式为

$$E_{\text{cr}} = E_{\max} - \frac{E_{\max} - E_{\min}}{Ks^2 + 1}$$

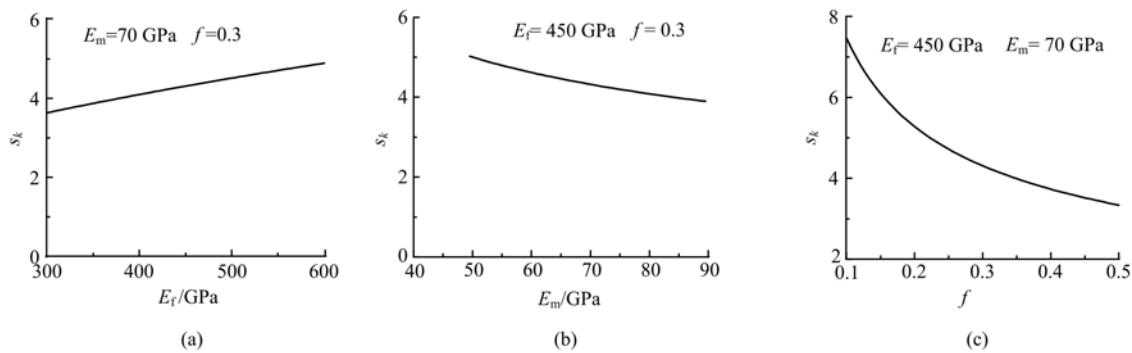
将  $E_{\max}, E_{\min}, K$  的材料参数关系式代入上式, 得

$$E_{\text{cr}} = (1-f)E_m + fE_f \frac{4fs^2E_m + 2E_m}{E_f + 4fs^2E_m + E_m} = E_c$$

这说明, 完全可以用代换函数来取代理论模型进行理论分析和工程设计运算。

### 4.2 材料参数对纤维临界长径比的影响

$E_f, E_m$  和  $f$  都会影响纤维临界长径比, 如图5所示。可以把临界长径比看做是当纤维直径一定时复合材料弹性模量接近最大值所需的纤维长度。纤维的弹性模量很大时, 界面残余应力较大, 导致界面结合力降低, 短纤维容易被拔出。要提高复合材料的弹性模量则需要加大纤维长度, 所以临界长径比随  $E_f$  的增加而增加, 如图5(a)所示。与此相反, 基体的弹性模量较大时, 界面应力减少, 较短纤维也能使得复合材料的弹性模量接近最大值。所以  $s_k$  随  $E_m$  的增加而减小, 如图5(b)所示。纤维体积分数的作用较大, 临界长径比随体积分数的增加明显减少, 如图5(c)所示。因为复合材料弹性模量随纤维体积分数的增加而增大, 接近最大值所需纤维长度也变短。

图 5  $s_k$  与  $E_f$ 、 $E_m$ 、 $f$  的关系曲线Fig. 5 Variation of the critical aspect ratio of the fiber  $s_k$  with the  $E_f$ ,  $E_m$  and  $f$ 

## 5 结 论

(1) 短纤维增强金属基复合材料的弹性模量随纤维长径比的增大而增加,且存在临界长径比和相对应的临界弹性模量。弹性模量增长幅度开始很大,超过临界值以后增长幅度很小。纤维临界长径比可定义为曲线拐点的切线和最大值水平线交点的坐标。

(2) 纤维长径比和复合材料的弹性模量的临界值可分别由式(19)、(20)进行预测计算。

(3) 纤维临界长径比随纤维弹性模量的增加而增加,随基体弹性模量和纤维体积分数的增加而降低。纤维和基体的弹性模量对临界值的影响较小,而纤维体积分数的影响却很大。

## 参考文献:

- [1] Kelly A. Strong solids [M]. Oxford: Clarendon Press, 1966.
- [2] Mukhopadhyay A K, Clyne T W, Chakrabort Y D. Influence of some parameters on the strength and fracture toughness of reaction-bonded silicon nitride composites with a relatively small modulus mismatch [J]. Materials Science and Engineering, 1989, A122: 183-192.
- [3] Karbhari V M, Wilkins D J. Engineering modification to the shear-lag model as applied to whisker and particulate reinforced composites [J]. Scripta Metallurgica, 1991, 25: 707-712.
- [4] Withers P J, Stobbs W M, Pedersen O B. Application of the eshely method of internal stress determination to short fibre metal matrix composites [J]. Acta Metallurgica, 1989, 37: 3061-3084.
- [5] Sharma S C. Elastic properties of short glass fiber-reinforced ZA-27 alloy metal matrix composites [J]. Journal of Materials Engineering and Performance, 2001, 10: 468-474.
- [6] Jung S W, Kim S Y, Nan H W, et al. Measurements of fiber orientation and elastic-modulus analysis in short-fiber-reinforced composites [J]. Composites Science and Technology, 2001, 61: 107-116.
- [7] 施惠基, 贾大炜, 程蕾. 热机械循环载荷下短纤维增强金属基复合材料性能分析 [J]. 机械强度, 2005, 27(3): 345-352.  
Shi Hui-ji, Jia Da-wei, Cheng Lei. Analysis of short fiber reinforced metal matrix composites properties under thermo-mechanical-cyclic loading [J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(3): 345-352.
- [8] 连建设, 江中浩, 扬德庄, 等. 短纤维增强金属基复合材料应力分布的剪切滞后分析 [J]. 复合材料学报, 1999, 16(4): 94-100.  
Lian Jian-she, Jiang Zhong-hao, Yang De-zhuang, et al. Shear lag analysis of stress distribution of short fiber reinforced metal matrix composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 1999, 16(4): 94-100.
- [9] Jiang Z H, Lian J S, Yang D Z, et al. An analytical study of the influence of thermal residual stresses on the elastic and yield behaviors of short fiber-reinforced metal matrix composites [J]. Materials Science and Engineering, 1998, A248: 256-275.
- [10] 江中浩, 连建设, 董尚利, 等. 短纤维增强金属基复合材料弹性模量和屈服强度不对称性的解释 [J]. 复合材料学报, 2000, 17(1): 51-55.  
Jiang Zhong-hao, Lian Jian-she, Dong Shang-li, et al. Interpretation for asymmetries in elastic modulus and yield strength of short fiber reinforced metal matrix composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2000, 17(1): 51-55.