**文章编号**:1671-5497(2006)03-0410-07

# 椭圆轨道上在轨服务航天器绕飞轨道设计及控制

王 峰,曹喜滨,耿云海

(哈尔滨工业大学 卫星技术研究所,哈尔滨 150001)

**摘 要**:针对在轨服务航天器相对椭圆轨道目标器任务要求,提出了追踪器相对目标器进行绕飞的初始条件及考虑各种摄动情况下轨道保持的最优控制算法。通过对椭圆轨道时变相对线性化方程及解析解的详细分析,给出了追踪器进行绕飞的必要条件。进一步考虑到安全问题,给出了使目标器位于绕飞轨迹中心的条件,同时还进行了给定追踪器形状和距离的绕飞轨迹设计。考虑到实际绕飞中受到各种摄动的影响,结合最优控制理论设计了控制向量受限的离散LQR最优控制器,将追踪器控制在预定的绕飞轨迹中。文中设计了三个控制误差区域,将控制器作用在合理的偏差范围内,避免了因控制测量误差而消耗大量燃料。最后进行了仿真验证,结果表明,文中的设计方法和控制算法合理有效。

**关键词**:飞行器设计;在轨服务;轨道设计;最优控制

**中图分类号**:V442 **文献标识码**:A

# Flyaround orbit design and keep control for on-orbit-servicing spacecraft in eccentric orbits

Wang Feng, Cao Xi-bin, Geng Yun-hai

(*Research Center of Satellite Technology*, *Harbin Institute of Technology*, *Harbin* 150001, *China*)

**Abstract**: Focusing on the requirement of on-orbit-servicing spacecraft to targeter in eccentric orbits, the initial conditions for the chaser flying around the targeter and the optimal control algorithm used to keep the flyaround orbit under perturbance were presented. With detailed analyzing the time variant and relatively linearized formulas and their analytic solutions, the necessary conditions for the chaser flyaround were acquired. To consider the safety, the conditions for the targeter to locate at the center of flyaround orbit and its design under given chaser shape and distance were presented. In view of the influence of perturbance, a discrete LQR optimal controller with constraint control vector to keep the chaser in the scheduled orbit was designed. Three control error boxes enabling the controller to work in the reasonable error areas to avoid fuel wastage for the error measure were also allocated. An example design was validated successfully by a simulation.

**Key words**: aerocraft design; on-orbit-servicing; orbit design; optimal control

---

**收稿日期**:2005-07-19.

**基金项目**:"973"国家重点基础研究发展规划项目(5131201).

**作者简介**:王峰(1981-),男,博士研究生.研究方向:在轨服务.E-mail:wfhitsat@hit.edu.cn

**通讯联系人**:曹喜滨(1963-),男,教授,博士生导师.研究方向:飞行器总体设计及仿真.E-mail:xbcao@hope.hit.edu.cn

## 0　引　言

为使在轨服务航天器完成对目标器状态全方位的监测,必须对目标器绕飞轨道的建立和控制进行研究。Inalhan 等人[1-3]对椭圆绕飞轨道的建立问题进行了研究,但算法较为复杂,且没有对绕飞轨迹形状和距离作进一步分析。为此,作者根据椭圆轨道时变线性化方程及解析解,给出了追踪器进行绕飞满足的必要条件和在考虑安全的情况下尽可能使目标器位于绕飞轨迹中心的条件。另外,为了确定追踪器绕飞的其他参数,对绕飞轨迹的形状和距离进行了分析和讨论,给出了确定具体形状和距离的设计方法。

Smith,Michad 等人[4,5]对目标器绕飞监测控制问题进行了研究,提出了遗传算法、线性规划算法等。这些方法控制效果好,消耗能量少,但需要的计算量大,对于服务器有限的计算能力来说很难满足要求。作者根据极大值原理,在控制向量受限的情况下,进行了 LQR 最优控制设计,预先计算出 LQR 控制中关键参数,节省有限的计算能力。在控制方法具体实现时,考虑到测量误差的影响,文中定义了三个偏差区域,使得控制器作用在合理的偏差范围内,避免了大量燃料的消耗。最后进行了具体绕飞轨迹实际设计,并进行了仿真验证。

## 1　相对绕飞条件及形状分析

定义目标器轨道坐标系 $oxyz$,原点为目标器质心 $o$,$ox$ 轴由地心指向质心 $o$;$oy$ 轴在轨道平面内与 $ox$ 垂直并指向目标器速度方向,$oz$ 轴在轨道平面法线方向与 $ox$、$oy$ 轴满足右手系关系。当相对间距不大时,处于椭圆轨道的服务器相对于目标器的运动学方程在轨道坐标系 $oxyz$ 中可表示为[2]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\dot{x}\\x\\\dot{y}\\y\\\dot{z}\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dot{\theta}^2[1+\frac{2}{1+e\cos\theta}] & 2\dot{\theta} & \ddot{\theta} & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\-2\dot{\theta} & \ddot{\theta} & 0 & \dot{\theta}^2[1-\frac{2}{1+e\cos\theta}] & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-[\frac{\dot{\theta}^2}{1+e\cos\theta}]\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\x\\\dot{y}\\y\\\dot{z}\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{bmatrix}\tag{1}$$

式中:$[x\ y\ z]$、$[\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]$分别为追踪器在目标器轨道坐标系中的位置和速度;$\theta$ 为目标器真近点角,且满足

$$\dot{\theta}=n(1+e\cos\theta)^2/(1-e^2)^{3/2}\tag{2}$$

式中:$n=\sqrt{\mu/a^3}$;$[u_x\ u_y\ u_z]^{\mathrm{T}}$ 为追踪器控制输入;$[w_x\ w_y\ w_z]^{\mathrm{T}}$ 为追踪器所受的各种摄动。当 $e=0$ 时,其即为圆轨道时的 C-W 方程。因此,该式也适合于圆轨道时的相对运动方程。式(1)是以时间为变量的运动学线性化方程,考虑到:

$$\begin{cases}(\dot{\bullet})=(\bullet)'\theta\\(\ddot{\bullet})=(\bullet)''\theta^2+(\bullet)'\theta\theta'\end{cases}\tag{3}$$

则由式(1)、(3)可得以 $\theta$ 为变量的运动学方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\begin{bmatrix}x'\\x\\y'\\y\\z'\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2e\sin\theta}{1+e\cos\theta} & \frac{3+e\cos\theta}{1+e\cos\theta} & 2 & \frac{-2e\sin\theta}{1+e\cos\theta} & 0 & 0\\-2 & \frac{2e\sin\theta}{1+e\cos\theta} & \frac{2e\sin\theta}{1+e\cos\theta} & \frac{e\cos\theta}{1+e\cos\theta} & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2e\sin\theta}{1+e\cos\theta} & \frac{-1}{1+e\cos\theta}\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\x\\y'\\y\\z'\\z\end{bmatrix}+\frac{(1-e^2)^3}{(1+e\cos\theta)^4n^2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x+w_x\\u_y+w_y\\u_z+w_z\end{bmatrix}\tag{4}$$

不考虑控制输入和各种摄动,式(4)有解析解:

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ x'(\theta) \\ y(\theta) \\ y'(\theta) \\ z(\theta) \\ z'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\sin\theta & 2e^2\sin\theta H(\theta) - \dfrac{e\cos\theta}{(1+e\cos\theta)^2} & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ e\cos\theta & (2e^2\sin\theta H(\theta) - \dfrac{e\cos\theta}{(1+e\cos\theta)^2})' & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 1+e\cos\theta & 2e(+e\cos\theta)H(\theta) & \dfrac{\sin\theta(2+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} & \dfrac{1}{1+e\cos\theta} & 0 & 0 \\ -e\sin\theta & (2e(1+e\cos\theta)H(\theta))' & (\dfrac{\sin\theta(2+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta})' & \dfrac{e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} & \dfrac{\cos\theta}{1+e\cos\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\dfrac{\sin\theta}{1+e\cos\theta})' & (\dfrac{\cos\theta}{1+e\cos\theta})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中：$d_i$ 为常数，$i=1,2,\cdots,6$，由初始条件给定；$H(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\theta}{(1+e\cos\theta)^3}d\theta$。

由式(5)可以看出与 C-W 方程类似，追踪器沿 $ox$、$oy$ 轴方向运动相互耦合，而沿 $oz$ 轴方向运动则与这两轴解耦，具体分析时可以单独考虑；除去包含 $H(\theta)$（其值随 $\theta$ 增加而增大）外，该解析解其他各项均为周期函数，最小正周期为 $2\pi$，因此要实现追踪器相对目标器的周期绕飞运动，解析解中包含 $H(\theta)$ 项应不存在，考虑到解析解的具体形式，可知若能保证包含 $H(\theta)$ 项的系数 $d_2=0$ 即可。考虑到 $d_i$ 由初始条件给定，要使 $d_2=0$，则只需要式(6)有唯一解即可。根据线性方程组性质，可知其系数矩阵和增广矩阵秩应相等，因此通过矩阵简单变换可得[3]：

$$\begin{bmatrix} e\sin\theta_0 & -\cos\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ e\cos\theta_0 & \sin\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+e\cos\theta_0 & \sin\theta_0+\dfrac{\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0} & \dfrac{1}{1+e\cos\theta_0} & 0 & 0 \\ -e\sin\theta_0 & \cos\theta_0+\dfrac{\cos\theta_0+e}{(1+e\cos\theta_0)^2} & \dfrac{e\sin\theta_0}{(1+e\cos\theta_0)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0} & \dfrac{\cos\theta_0}{1+e\cos\theta_0} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\cos\theta_0+e}{(1+e\cos\theta_0)^2} & \dfrac{-\sin\theta_0+e}{(1+e\cos\theta_0)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\theta_0) \\ x'(\theta_0) \\ y(\theta_0) \\ y'(\theta_0) \\ z(\theta_0) \\ z'(\theta_0) \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$y'(\theta_0) - \frac{e\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0}y(\theta_0) + \frac{e\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0}x'(\theta_0) + \frac{2+e\cos\theta_0}{1+e\cos\theta_0}x(\theta_0) = 0 \tag{7}$$

当 $\theta_0=0$ 时，式(7)即为文献[2]给出的追踪器应满足的初始条件。结合式(2)、式(7)可改写成以时间为变量的初始条件：

$$\dot{y}(t_0) - \frac{n(1+e\cos\theta_0)e\sin\theta_0}{(1-e^2)^{3/2}}y(t_0) + \frac{e\sin\theta_0}{1+e\cos\theta_0}\dot{x}(t_0) + \frac{n(1+e\cos\theta_0)(2+e\cos\theta_0)}{(1-e^2)^{3/2}}x(t_0) = 0 \tag{8}$$

式(7)或式(8)即为椭圆轨道追踪器相对目标器能进行周期性运动应满足的必要初始条件。当 $e=0$ 时，由式(8)可得 $\dot{y}(t_0)+2nx(t_0)=0$，即为由 C-W 方程解析解推导出追踪器周期性运动应满足的初始条件。

由式(5)、式(6)可以看出，追踪器相对目标器的运动轨迹由 6 个初始条件确定，式(7)（或式(8)，下同）仅给出一个约束条件使得 $d_2=0$，而其他系数还没有确定。当 $d_2=0$ 时可得追踪器运动轨迹为：

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} d_1 e\sin\theta - d_3\cos\theta \\ d_1(1+e\cos\theta) + d_3\dfrac{\sin\theta(2+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} + d_4\dfrac{1}{1+e\cos\theta} \\ d_5\dfrac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} + d_6\dfrac{\cos\theta}{1+e\cos\theta} \end{bmatrix} \tag{9}$$

由解析解式(9)可以看出,仅满足式(7)条件还不能确保追踪器能够实现对目标器周期性的绕飞运动,故有必要对其中参数作进一步的讨论。先考虑耦合的轨道面内的相互运动,要使追踪器实现绕飞运动,坐标原点应处于封闭的轨迹内部,则方程

$$x(\theta) = 0,\ y(\theta) = 0 \tag{10}$$

应有解。通过求解方程(10),并结合具体的图形可以实现追踪器的绕飞运动,但求解方程(10)较为费时。若能结合绕飞安全方面的考虑,应尽可能保证目标器在整个绕飞期间位于绕飞轨迹中心(非严格中心)附近。适当变换 $x(\theta)$ 表达式后可得:

$$x(\theta) = d_1 e\sin\theta - d_3\cos\theta = \Delta\sin(\theta-\varphi) \tag{11}$$

式中:$\Delta = \sqrt{(d_1 e)^2 + (d_3)^2}$;$\varphi = \arctan(d_3/d_1 e)$。考虑 $0 \leqslant \theta-\varphi < 2\pi$、$\theta_1 = \pi/2+\varphi$、$\theta_2 = 3\pi/2+\varphi$ 时,$x(\theta)$ 取极大值 $\Delta$ 和极小值 $-\Delta$,则相应 $y(\theta)$ 的值可记为 $y(\theta_1)$ 和 $y(\theta_2)$。根据绕飞要求要使目标器尽可能处于中心,则应有:

$$y(\theta_1) = -y(\theta_2) \tag{12}$$

求解式(12)可得:

$$d_4 = -d_1,\ y(\theta_1) = d_1(\Delta-1)/(\Delta-ed_3) \tag{13}$$

显然通过求解 $y(\theta)$ 极值,根据 $x(\theta)$ 满足相应条件也能获得一约束条件,但是求解 $y(\theta)$ 极值过程较为繁杂,此处不再讨论。对于 $z(\theta)$,由其表达式可看出 $\exists\,\theta^* \in [0,2\pi)$,使得 $z(\theta^*)=0$,这表明能够保证目标器尽可能位于中心附近,满足实际绕飞任务监测需要。

由前面式(8)、式(13)可以看出,其仅确保了追踪器的相对运动是周期性绕飞运动,但没有对具体绕飞形状和距离(或大小)进行约束。

对于绕飞形状问题,在满足绕飞条件后,由式(9)($\theta\in[-\pi,\pi]$)和三角函数性质可知:$d_1=0$ 时,$x(\theta)$ 为偶函数,$y(\theta)$ 为奇函数,绕飞轨迹关于 $ox$ 轴对称;$d_3=0$ 时,$x(\theta)$ 为奇函数,$y(\theta)$ 为偶函数,绕飞轨迹关于 $oy$ 轴对称;$d_5=0$ 时,$z(\theta)$ 为偶函数,$d_6=0$ 时,$z(\theta)$ 为奇函数,与前面结合可得到不同性质的绕飞轨迹。由前面分析可知,对于目标器处于任意椭圆($e\neq0$)轨道的绕飞,轨道面内不存在既关于 $oy$ 轴对称又关于 $ox$ 轴对称的绕飞轨迹。而 $e\neq0$,绕飞轨迹退化为椭圆。

考虑到绕飞轨迹较为复杂,若采用传统描述距离方法描述其轨迹距离较为不便,故此处采用如图 1 所示的矩形对绕飞轨迹大小进行描述。图中矩形与各坐标半轴交点($x$ 正半轴,$x$ 负半轴,$y$ 正半轴,$y$ 负半轴)的刻度分别为 $x_p$、$x_m$、$y_p$、$y_m$。对任一矩形,轨迹大小可定义为追踪器在不超出给定矩形时的最大绕飞轨迹,则根据定义应有:

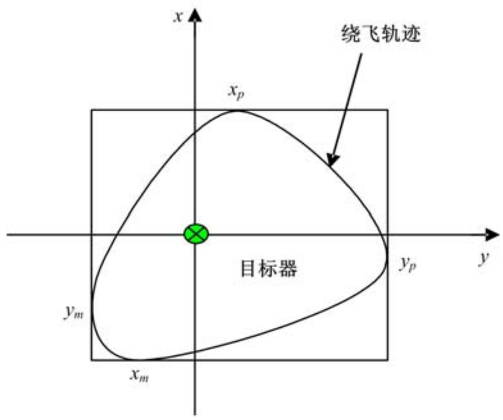



**图 1　绕飞轨迹距离矩阵**

**Fig. 1　Size matrix of flyaround trajectory**

$$\begin{cases} x(\theta)_{\max} \leqslant x_p,\ -x(\theta)_{\min} \leqslant x_m \\ y(\theta)_{\max} \leqslant y_p,\ -y(\theta)_{\min} \leqslant y_m \end{cases} \tag{14}$$

由式(9)、式(14)即可获得确定绕飞轨迹大小的约束条件,从而确定系数 $d_1$、$d_3$ 和 $d_4$。特别地,若绕飞图形考虑式(13)的条件,则 $d_4=d_1$,且

$$x(\theta)_{\max} = \Delta,\ x(\theta)_{\min} = -\Delta \tag{15}$$

进一步,若图形关于 $oy$ 轴对称,则 $d_3=0$,且

$$\begin{cases} y(\theta)_{\max} = d_1 e(e+2)/(1+e) \\ y(\theta)_{\min} = d_1 e(e-2)/(1-e) \end{cases} \tag{16}$$

则由式(14)、(15)和(16)可以确定 $d_1$ 的取值。对于 $z(\theta)$,可以采用类似方法求解,此处不再讨论。

## 2　绕飞轨道保持最优控制

将式(1)改写为线性时变标准方程:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{w}(t) \tag{17}$$

式中:$\boldsymbol{x}$ 为状态向量;$\boldsymbol{u}$ 为控制向量;$\boldsymbol{w}$ 为摄动向量。

对式(2)所示的线性连续系统进行离散化,设采样周期为 $T_s$,连续系统状态转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$,可得离散化后状态方程为:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Lambda}_k\boldsymbol{w}_k \tag{18}$$

式中: $\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} = \boldsymbol{\Phi}((k+1)T_s, kT_s)$

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s}\boldsymbol{\Phi}((k+1)T_s,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_k = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s}\boldsymbol{\Phi}((k+1)T_s,\tau)\boldsymbol{D}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

当采样周期 $T_s$ 足够小时,可取 $\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\approx\boldsymbol{I}+T_s\boldsymbol{A}(kT_s)$,$\boldsymbol{\Gamma}_k\approx T_s\boldsymbol{B}(kT_s)$,$\boldsymbol{\Lambda}_k\approx T_s\boldsymbol{D}(kT_s)$。

## 2.1 控制向量受限 LQR 最优控制

追踪器满足初始绕飞条件后,其理想绕飞的相对运动学方程可记为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{19}$$

结合追踪器实际运动方程式(18),记 $\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}$,可得追踪器相对运动的偏差方程为:

$$\delta\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\delta\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Lambda}_k\boldsymbol{w}_k \tag{20}$$

由式(1)可知式(17)中 $\boldsymbol{B}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 相等且均为常数矩阵,记为 $\boldsymbol{C}$,故 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Lambda}\approx T_s\boldsymbol{D}$。则由式(20)可得:

$$\delta\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}_k\delta\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{v}_k \tag{21}$$

式中:$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{I}+T_s\boldsymbol{A}(kT_s)$;$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{w}_k$;$\boldsymbol{G}_k=T_s\boldsymbol{C}$。

考虑式(21)所示系统,记追踪器初始状态偏差为 $\delta\boldsymbol{x}_0$,$\boldsymbol{v}$ 满足 $|\boldsymbol{v}|\leqslant v_{\max}$,其最优控制问题转化为求反馈控制。$\boldsymbol{v}^*(k)=-\boldsymbol{K}(k)\delta\boldsymbol{x}(k)$ 满足限幅值,且使目标函数

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\delta\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{v}(k)) \tag{22}$$

取极小,其中 $\boldsymbol{Q}>0$,$\boldsymbol{R}>0$。

根据极小值原理,记哈密顿函数为(略去"$k$"):

$$H(k) = \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\delta\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(k+1)(\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}) \tag{23}$$

$\boldsymbol{v}$ 有限幅,对式(23)配方得(其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{\lambda}(k+1)$):

$$H(k) = \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}) \tag{24}$$

对 $H(k)$ 在 $v\in[-v_{\max},v_{\max}]$ 上用控制方程,考虑到 $\boldsymbol{R}>0$,要使 最小,则有:

$$v_i^*(k) = \begin{cases} v_{\max} & (-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i \geqslant v_{\max} \\ (-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i & -v_{\max} < (-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i < v_{\max} \\ -v_{\max} & (-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})_i \leqslant -v_{\max} \end{cases} \tag{25}$$

式中:$(\boldsymbol{M})_i$ 表示取向量 $\boldsymbol{M}$ 中的第 $i$ 个元素,$i=1$、2、3;而 $\boldsymbol{\lambda}$ 满足协态方程:

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{Q}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(k+1) \tag{26}$$

将式(25)代入式(21)可得系统状态方程变为:

$$\begin{cases} \delta\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F}(k)\delta\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{v}^*(k) \\ \delta\boldsymbol{x}(0) = \delta\boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{27}$$

要使系统稳定且形式简单,此处可设:

$$\boldsymbol{\lambda}(k+1) = \boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{x}(k+1) \tag{28}$$

式中:$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0$。下面来确定 $\boldsymbol{P}$ 需要满足的 Riccati 方程。

将式(28)代入式(26)可得:

$$\boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{Q}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\delta\boldsymbol{x}(k+1) \tag{29}$$

由式(25)、(27)和(28)可得(其中最优控制向量 $\boldsymbol{v}^*$ 取 $-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(k+1)$ 即可):

$$\delta\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{x}(k) \tag{30}$$

结合式(29)和式(30)可知 $\boldsymbol{P}$ 应满足的 Riccati 方程为:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{F} \tag{31}$$

根据式(31)即可确定 $\boldsymbol{P}$,则使目标函数极小的最优控制式(25)变为:

$$v_i^*(k) = \begin{cases} v_{\max} & (-\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{x}(k))_i \geqslant v_{\max} \\ (-\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{x}(k))_i & -v_{\max} < (-\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{x}(k))_i < v_{\max} \\ -v_{\max} & (-\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{x}(k))_i \leqslant -v_{\max} \end{cases} \tag{32}$$

式中:$\boldsymbol{K}(k) = (\boldsymbol{R}(k)+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}(k))^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(k)$

对于给定的轨道参数及物理参数,追踪器受到的相对摄动向量 $\boldsymbol{w}_k$ 可近似看作已知的,实际中可以仅考虑大气阻力和 $J_2$ 摄动。从目标函数可以看出,$\boldsymbol{v}^*$ 可认为是追踪器除消除当前摄动以外所需要施加的额外最优值,用以消除追踪器没有控制时摄动引起的状态偏差,因此追踪器实际需要施加的最优控制值为:

$$\boldsymbol{u}_k^* = \boldsymbol{v}_k^* - \boldsymbol{w}_k \tag{33}$$

由式(1)可知,该时变系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 随时间变化很小,故文中设计的控制器对系统(21)的稳定性判定可以采用文献[7]中的定理

4.5.1 进行判断。

**2.2　控制方法实现**

在实际飞行中,若追踪器初始状态偏差 $\delta \boldsymbol{x}_0$ 很小,而追踪器实际受到的相对摄动也很小,在给定 $\boldsymbol{K}(k)$ 后,则由式(33)给出控制值最小量,考虑到测量精度、喷气误差等影响因素,直接进行控制对实际精度提高不会带来太大影响,相反会造成大量燃料的消耗,这显然不满足燃料最优控制的要求。针对这一问题,文献[2,3]定义了一空间位置偏差区域(Error Box)来判断当前实际位置偏差是否超出该区域,以确定控制是否实施并达到解决问题的目的。相对位置偏差可以用来描述当前追踪器偏离理想点的程度,而相对速度偏差则可以用来描述追踪器偏离理想点的快慢,因此文中定义的偏差区域包括位置偏差和速度偏差。考虑式(20)中的状态向量,可定义任意 $t$ 时刻追踪器允许的偏差区域 $\boldsymbol{e}(t)$ 为:

$$\boldsymbol{e}(t) = [e_{vx}\ e_x\ e_{vy}\ e_y\ e_{vz}\ e_z] \tag{34}$$

式中:$e_{vi}$ 和 $e_i(i=x,y,z)$ 分别为 $t$ 时刻追踪器在 $i$ 轴上允许的速度和位置偏差值。考虑到实际中追踪器离目标器距离的不同会有不同的允许偏差精度,文中定义一个随距离变化而变化的偏差区域来满足这一要求。设 $t_0$ 时刻允许偏差区域为 $\boldsymbol{e}(t_0)$,追踪器测量误差为 $\boldsymbol{e}_m$,则任意 $t$ 时刻允许偏差区域 $\boldsymbol{e}(t)$ 可表示为:

$$\boldsymbol{e}(t) = (\boldsymbol{e}(t_0) - \boldsymbol{e}_m)\left(\frac{l(t)}{l(t_0)}\right)^n + \boldsymbol{e}_m \tag{35}$$

式中:$l(t)$ 为追踪器离目标器的理想距离;$n$ 为幂指数,不同任务可选不同参数。

为了便于控制切换,在偏差区域(见图 2)中定义 3 个偏差概念:极限偏差 $\boldsymbol{e}_{\rm lim}$,控制触发偏差 $\boldsymbol{e}_{\rm ts}$ 和控制结束偏差 $\boldsymbol{e}_{\rm to}$。其中极限偏差是追踪器控制需要满足的偏差,控制触发偏差用来判断追踪器是否需要施加控制,控制结束偏差则是控制到达目标值停止控制的偏差。

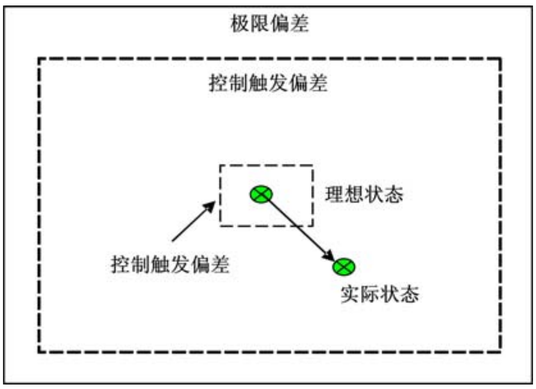



**图 2　偏差区域示意图**

**Fig. 2　Schematic of error boxes**

另外,为了提高控制的真实性,在实际控制中追踪器和目标器运动方程可采用精确的运动方程:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u} \tag{36}$$

式中:$\boldsymbol{d}$ 为星体受到的各种摄动;$\boldsymbol{u}$ 则是由式(33)给出的最优控制向量。

# 3　仿真验证

下面根据前面给出的算法进行仿真验证。

设目标器轨道参数:$a = 12\ 578.137$ km,$e = 0.461\ 12$,$i = 63.435°$,$\Omega = 50°$,$u = 270°$,$\theta = 10°$,目标器和追踪器质量均为 200 kg,迎风面积差为 1%。

绕飞轨迹要求:绕飞处于轨道平面内,图形关于 $oy$ 轴对称,描述绕飞轨迹大小矩形为 $x_p = 100$ m,$x_m = 100$ m,$y_p = 200$ m,$y_m = 300$ m。

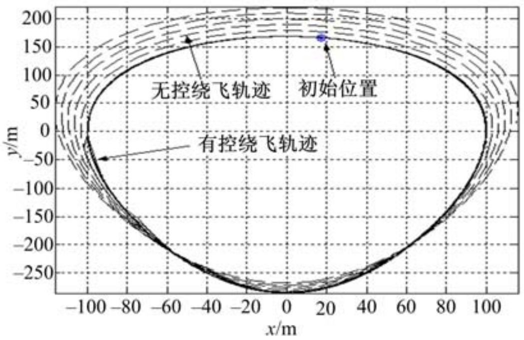
根据上述目标器轨道参数以及绕飞轨迹的要求,采用第 2 节方法可得:

$$d_1 = -d_4 = 216.864, d_2 = d_3 = d_5 = d_6 = 0 \tag{37}$$

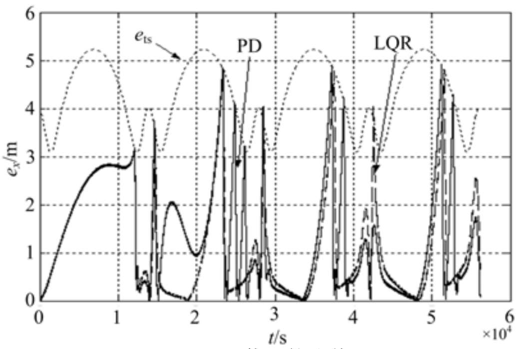
将式(37)代入式(6),考虑到 $\theta_0$ 为 10°及式(2),可得追踪器在目标器轨道坐标系中初始位置和速度为[17.365 , 166.206, 0] m 和[0.0435, −0.0113, 0] m/s。

相对速度和位置的误差分别设为 ±0.3 mm/s 和 ±2 cm[6]。文中 $\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1,\ 1.2\times10^{-4},\ 1,\ 1.2\times10^{-4},\ 1,\ 1.2\times10^{-4})\ \times10^{-2}$,$\boldsymbol{R} = 50\boldsymbol{I}_{3\times3}$,能够保证系统渐近稳定性[7]。为了便于比较,文中特对式(21)进行了 PD 负反馈控制仿真,相应控制参数为 $\boldsymbol{K}_P = \mathrm{diag}(0.001,\ 0.001, 0.001)$ 和 $\boldsymbol{K}_D = \mathrm{diag}(0.1,\ 0.1, 0.1)$。控制量限幅 $v_{\max} = 5\times10^{-4}$ m/s$^2$;$t_0$ 时刻,3 种允许偏差区域分别设为 $e_{\rm lim}(t_0) = [0.1,\ 4.5,\ 0.1,\ 4.5,\ 0.1, 4.5]$ m/s(m),$n = 0.5$;$e_{\rm ts}(t_0) = [5\times10^{-3},\ 4,\ 5\times10^{-3},\ 4,\ 5\times10^{-3},\ 4]$ m/s(m),$n = 0.5$;$e_{\rm to}(t_0) = [5\times10^{-4},\ 0.03,\ 5\times10^{-4},\ 0.03,\ 5\times10^{-4},\ 0.03]$ m/s(m),$n = 0$。至于式(36)给出的非线性模型可以参考 STK 中 HPOP 高精度轨道预报模型来合理设计。

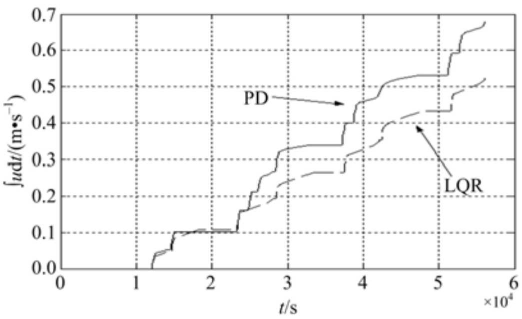
根据前面的仿真条件进行仿真,仿真时间为4个轨道周期,图3给出了相应的仿真结果曲线。由图3(a)绕飞轨迹可以看出,根据文中提出的轨道设计方法能够完成预定绕飞轨道的设计,当椭圆轨道追踪器满足文中提出的绕飞条件后,能够完成无摄动时周期性绕飞。但考虑各种摄动后,若不对追踪器进行控制,其绕飞轨迹将会发散,严重时会有与目标器碰撞的危险。图3(b)和3(c)对PD和LQR两种控制方法的性能做了比较。由图3(b)绕飞轨迹偏差可以看出,两种方法均将追踪器实际绕飞偏差控制在预定的偏差区域内,但PD控制下实际偏差增大较LQR快,致使PD控制实际切换次数较后者多。图3(c)给出了两种控制器在相同时间内消耗的燃料比较,PD控制没有进行优化,每周较LQR多消耗近30%。




(a) 轨道面内绕飞轨迹




(b) 绕飞轨迹偏差




(c) 累计消耗燃料

**图3　PD和LQR控制下追踪器绕飞仿真曲线**

**Fig. 3　Simulation of chaser flyaround under PD and LQR conctrols**

## 4　结束语

在轨服务航天器受其自身任务要求,必须具备对任意椭圆轨道航天器绕飞能力,进而完成相关的服务任务。本文对这方面的绕飞问题进行了研究和分析,给出了椭圆轨道追踪器进行周期性绕飞的必要条件和不同绕飞轨迹形状及大小应该满足的条件。采用文中设计的控制向量受限的LQR最优控制,克服了各种摄动带来的影响,将绕飞轨迹始终控制在预定的偏差范围之内。仿真结果表明,完成同样的控制任务,该算法较PD算法节省近30%燃料。另外文中所定义的3个偏差区域使得控制器作用在合理的偏差范围内,避免了为测量误差而消耗的大量燃料,在实际工程中有较高的应用价值。

**参考文献:**

[1] Gökhan Inalhan, Michael Tillerson, Jonathan P How. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1): 48-59.

[2] Joerg Kreisel. On-Orbit servicing of satellites (OOS): Its potential market and impact[C]// ASTRA Workshop 2002 - ESA/ESTEC, 2002.

[3] 于萍,张洪华.椭圆轨道编队飞行的典型模态与构型保持控制方法[J].宇航学报,2005,26(1):8-12.
Yu Ping, Zhang Hong-hua. Representative formation-keeping mode and control for spacecraft in eccentric orbits[J]. Journal of Astronautics, 2005, 26(1): 8-12.

[4] Smith J, Proulx R, Cefola P, Draim J. An operational approach for generating nearing optimal station keeping strategies via parallel genetic algorithms[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2000, 103(2): 1349-1369.

[5] Michael Tillerson, Jonathan P How. Formations flying control in eccentric orbits[C]//Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Montreal(Canada): AIAA, 2001.

[6] Leung S, Montenbruck O. High precision real time navigation for spacecraft formation flying[C]// ION GPS Conference. Portland, Oregon, 2003.

[7] 邢继祥,张春蕊,徐洪泽.最优控制应用基础[M].北京:科学出版社,2003:142-162.

(责任编辑　程仲基)