第36卷　增刊　　吉 林 大 学 学 报 (工 学 版)　　Vol. 36　Suppl.
2006年3月　　Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)　　Mar. 2006

文章编号:1671－5497(2006)Suppl.－0030－04

结构优化中的海森矩阵的近似迭代方法

麻　凯,陈塑寰

(吉林大学 机械科学与工程学院,长春 130022)

摘　要:为了避免在结构优化中近似计算目标函数和约束函数的二阶泰勒展开式时计算海森矩阵,提出了只计算函数的一阶导数项计算海森矩阵逆的方法(DFP 方法),这种方法省去了计算函数的二阶导数矩阵和求矩阵的逆的过程。通过对悬臂板结构的优化计算表明,该方法对结构优化问题是有效的。

关键词:工程力学;结构尺寸参数优化;DFP 方法;拉格朗日乘子法;海森矩阵

中图分类号:O302　　**文献标识码**:A

Iterative approximation algorithm of Hessian matrix in structural optimization

MA Kai, Chen Su-huan

(*College of Mechanical Science and Engineering*, *Jilin University*, *Changchun* 130022, *China*)

Abstract: To avoid calculating Hessian matrix when the object function and the constraint functions are approximated by the second-order taylor expansion, a first-order method called Davidon and Fletcher-Powell method (DFP method) was used to obtain the inversion of the Hessian matrix, which completely eliminates the need for evaluating the second-order derivatives and performing matrix inversion. The presented method was implemented for the optimization of a cantilever plate with stiffeners. The caluculation results show that DFP method is effective for structural optimization.

Key words: engineering mechanics; optimization on structural parameters; DFP method; Lagrange function; Hessian matrix

0　引　言

近些年来,工程中优化问题的主要研究方向为结构拓扑优化、计算效率优化和结构参数优化。在结构拓扑优化方面,文献[1]提出了根据单元能量进行优化的 ICA 方法,Schwarz 等人提出了弹塑性材料结构的拓扑优化方法[2]。在计算效率优化方面,Weinert 和 Papadrakakis 等提出了数值计算中的优化方法[3,4]。在结构参数优化方面,文献[5]提出了结构参数的区间优化方法,Schittkowski 等提出应用库恩托克乘子法和 BFGS 法进行结构尺寸优化[6,7],但是实践证明,DFP 法[8,9]比 BFGS 法[10,11]更稳定、收敛速度更快,迭代次数更少且计算量也更小。由于拉格朗日乘子法与库恩托克乘子法相比,减少了每项约束中的松弛因子,却仍有较高的计算精度,所以作者提出用拉格朗日乘子法将工程中的约束问题转化为非

收稿日期:2005-07-31.

基金项目:吉林省科技发展计划项目(20040330);吉林大学“985 工程”资助项目.

作者简介:麻凯(1978－),男,博士研究生. 研究方向:结构优化. E-mail:mk@jlu.edu.cn

通讯联系人:陈塑寰(1934－),男,教授,博士生导师. 研究方向:结构动态设计理论. E-mail:chensh@jlu.edu.cn

约束问题,并将其函数进行二阶泰勒展开,然后利用 DFP 法[12]迭代近似计算函数的海森矩阵,同时得到优化结果。

1　函数优化的拉格朗日乘子法

优化目标

$$\min f(\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

约束条件

$$\text{s.t.}\ h(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)$,$n$ 为优化参数的个数。

式(1),(2)的拉格朗日函数如下:

$$L(\boldsymbol{X},v) = f(\boldsymbol{X}) - \sum_{i=1}^{k} v_i h_i \tag{3}$$

式中:v_i 为拉格朗日乘子;k 为约束条件个数。

极值点必要条件为:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,\cdots,n \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = h_i(\boldsymbol{X}) = 0 \quad i = 1,\cdots,k \tag{5}$$

2　计算 Hessian 矩阵逆的 DFP 法

为了求有多个变量的连续可微分函数 $f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ 的最小值,需要知道方程取极小值点时变量 $\tilde{\boldsymbol{X}}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)$ 的值。假设方程在 $\tilde{x}$ 处有最小值,且方程连续可微,则该方程在 $\tilde{x}$ 点的泰勒展开式如下:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n) + (x_1-\tilde{x}_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\tilde{x}} + \cdots + (x_n-\tilde{x}_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{\tilde{x}} + \frac{1}{2}(x_1-\tilde{x}_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}(x_2-\tilde{x}_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + (x_1-\tilde{x}_1)(x_2-\tilde{x}_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} + \cdots \tag{6}$$

式(6)可简化为:

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \nabla f(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}|_{\tilde{x}}(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2}(x-\tilde{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X}))|_{\tilde{x}}(x-\tilde{x}) + \cdots \tag{7}$$

设

$$\nabla f(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \tag{8}$$

再设 $\boldsymbol{H}$ 为包含二阶偏导的海森矩阵,可得式(9):

$$\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

如果方程 f 在 $\tilde{x}$ 点有局部极小值,则必有

$$\nabla f(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}|_{\tilde{x}} = 0 \tag{10}$$

这就需要求解 n 个方程得到 $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n$。

如果 $\tilde{x}$ 是极小值点,那么

$$f(\boldsymbol{X}) > f(\tilde{\boldsymbol{X}}) \tag{11}$$

如果 $|x-\tilde{x}|$ 足够小,就有

$$(x-\tilde{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X}))|_{\tilde{x}}(x-\tilde{x}) < 0 \tag{12}$$

$$\forall\,(x-\tilde{x}) \neq 0$$

所以 $\boldsymbol{H}|_{\tilde{x}}$ 为正定矩阵。

综上所述,求函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的极小值点,即 $\nabla f(\boldsymbol{X})=0$。但实际并不简单,因为迭代计算格式必须为:

$$\boldsymbol{X}^{i+1} = \boldsymbol{X}^{i} - \boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i}))\nabla f(\boldsymbol{X}^{i}) \tag{13}$$

在实际应用中,经常不能直接得到海森矩阵的逆,即 $\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i}))$,故采用 PDF方法。这种方法不但能快速收敛,而且只要知道梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{X})$ 就可以迭代计算海森矩阵的逆,其步骤如下。

第 1 步:给出初始值 $\boldsymbol{X}^0$,令 $\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^0))$ 为单位阵,设

$$\boldsymbol{S}_0 = -\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X}^0))\nabla f(\boldsymbol{X}^0) \tag{14}$$

第 2 步:计算 $\boldsymbol{X}^1=\boldsymbol{X}^0+a^*\boldsymbol{S}_0$,使 $f(\boldsymbol{X}^0+a^*\boldsymbol{S}_0)$ 最小。

第 3 步:对于 $i=0,1,2,\cdots$

①计算

$$\boldsymbol{\partial}^{i+1} = \boldsymbol{X}^{i+1} - \boldsymbol{X}^{i} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{p}^{i+1} = \nabla f(\boldsymbol{X}^{i+1}) - \nabla f(\boldsymbol{X}^{i}) \tag{16}$$

$$\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+2})) = \boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+1})) + \frac{\boldsymbol{\partial}^{i+1}(\boldsymbol{\partial}^{i+1})^{\mathrm{T}}}{(\partial^{i+1},\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+1}))\partial^{i+1})} - \frac{\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+1}))\boldsymbol{p}^{i+1}(\boldsymbol{p}^{i+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+1}))}{(\boldsymbol{p}^{i+1},\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+1}))\boldsymbol{p}^{i+1})} \tag{17}$$

②计算

$$\boldsymbol{S}_{i+2} = -\boldsymbol{H}^{-1}(f(\boldsymbol{X}^{i+2}))\nabla f(\boldsymbol{X}^{i+1}) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{X}^{i+2} = \boldsymbol{X}^{i+1} + a^*\boldsymbol{S}_{i+2} \tag{19}$$

式中的 a^* 使 $L(\boldsymbol{X}^{i+1}+a^*\boldsymbol{S}_{i+2})$ 取得极小。

③检验收敛性条件：如果 $\|\boldsymbol{X}^{i+2}-\boldsymbol{X}^{i+1}\|_f\leqslant\varepsilon$，停止迭代；否则重复第①、②、③步。

3 结构优化的二阶近似方法

优化目标：

$$\min\quad f(\boldsymbol{X})=f(x_1,\cdots,x_n)\tag{20}$$

约束条件：

$$\text{s.t.}\,h(\boldsymbol{X})=0\tag{21}$$

设优化变量初始值为 $\boldsymbol{X}^0$，将优化目标函数在初始点二阶泰勒展开为式(22)，将约束条件在初始点一阶泰勒展开为式(23)。

$$\min\quad f(\boldsymbol{X}^i)=f(\boldsymbol{X}^0)+\nabla^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{X}^0)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X}^0))(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)\tag{22}$$

$$\text{s.t.}\quad h(\boldsymbol{X}^i)=h(\boldsymbol{X}^0)+\nabla^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{X}^0)(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(h(\boldsymbol{X}^0))(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)=0$$

$$i=1,2,\cdots\tag{23}$$

由拉格朗日乘子法得到函数的二阶泰勒展开为：

$$L(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X}^0)-vh(\boldsymbol{X}^0)+\nabla^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{X}^0)-v\nabla^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{X}^0)(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X}^0))-v\boldsymbol{H}(h(\boldsymbol{X}^0)))(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)\tag{24}$$

设

$$\boldsymbol{H}(L(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{X}^0))=\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{X}^0))-v\boldsymbol{H}(h(\boldsymbol{X}^0))\tag{25}$$

由DFP法近似迭代可分别得到 $\boldsymbol{H}(L(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{X}^0))$ 和最终优化解。

4 算 例

计算一个有加强筋的悬壁板结构，板长为90 mm、板宽为30 mm、板厚为1.2 mm，沿板的长度方向布置两条加强筋，加强筋长度与板长相同，加强筋之间的距离为10 mm，两条加强筋与板边缘距离也为10 mm，加强筋的截面高为1 mm，截面宽为1 mm。板和加强筋采用同种材料，密度为 7.8×10^{-6} kg/mm^3、泊松比为0.29、弹性模量为 2.68×10^8 Pa。将板平均划分成27个10 mm×10 mm的板壳单元，两根加强筋板分别划分为9个长度为10 mm的梁单元，板左端4个节点完全固定，右端中间两个节点上施加2个150 N沿 Z 轴正向的力，如图1所示。

设以悬壁板的板厚 t 和加强筋的横截面宽度 b 为变量对悬壁板结构进行参数优化。设 $\boldsymbol{X}=(t,b)$，优化目标：板的右端两个受力节点处位移 w 最小；约束条件：板的最大应力 $\sigma=6$ MPa。

由已知条件可得到下式：

$$\begin{cases}\min\quad w(\boldsymbol{X})\\ \text{s.t.}\,\sigma(\boldsymbol{X})/6-1=0\end{cases}\tag{26}$$

由式(26)可构造其拉格朗日函数为：

$$L(\boldsymbol{X})=w(\boldsymbol{X}^0)-v[\sigma(\boldsymbol{X})/6-1]+\nabla^{\mathrm{T}}w(\boldsymbol{X}^0)-v\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}^0)(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)^{\mathrm{T}}\tag{27}$$

$$(\boldsymbol{H}(w(\boldsymbol{X}^0))-v\boldsymbol{H}(\sigma(\boldsymbol{X}^0)))(\boldsymbol{X}^i-\boldsymbol{X}^0)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^0)=\boldsymbol{H}(w(\boldsymbol{X}^0))-v\boldsymbol{H}(\sigma(\boldsymbol{X}^0))\tag{28}$$

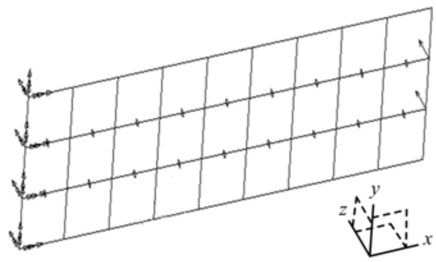

图1 悬壁板的结构图

Fig.1 The structure of the cantilever plate

由已知条件，在初始设计点附近给出了三组初始值，见表1，经过迭代优化后的结果见表2。由表2可知，计算过程中变量收敛速度很快，而且从第4次迭代开始，函数中各个参数的值基本不变，说明函数已经得到了优化结果。

表1 三组初始值

Table 1 Three groups of initial values

迭代次数	t/mm	b/mm	v	w/mm	σ/MPa
1	1.2000	0.9900	1.0000	0.1020	4.333
2	1.1900	0.9800	1.1000	0.1046	4.404
3	1.2100	0.9700	1.2000	0.0997	4.269

表2 迭代结果

Table 2 Iterative results

迭代次数	t/mm	b/mm	v	w/mm	σ/MPa
1	1.0064	1.0632	0.2295	0.1683	5.985
2	1.0081	0.9536	0.2612	0.1683	6.006
3	1.0104	0.9365	0.2596	0.1674	5.987
4	1.0105	0.9367	0.2596	0.1674	5.991
5	1.0105	0.9367	0.2596	0.1674	5.991

将优化得到的结果带入有限元软件进行计算,所得的应力均小于题设中要求的最大应力的0.15%,如图2所示,可见优化结果十分理想。

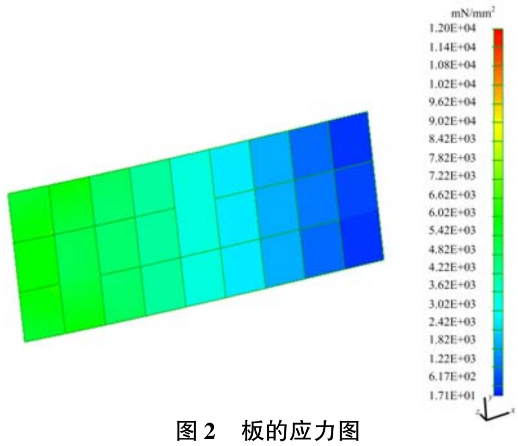

图 2　板的应力图

Fig. 2　Stress of the cantilever plate

5　结束语

与以往的参数优化相比,DFP 方法加入了约束函数的二阶项,使计算结果更加精确。作者对悬壁板结构中的悬壁板板厚和加强筋的横截面宽度应用 DFP 方法进行了优化,得到了满意的结果。计算结果证明,DFP 方法可以用于实际的结构参数优化,这种优化方法可以降低计算难度,节省计算时间,提高计算精度和效率。

参考文献:

[1] 杨志军,陈塑寰,吴晓明. 结构静态拓扑重分析的迭代组合近似方法[J]. 力学学报,2004,36(5):611-616.

Yang Zhi-jun, Chen Su-huan, Wu Xiao-ming. An iterative combined approximation approach for structural static reanalysis of topological[J]. Acta Mechanica Solida Sinica,2004,36(5):611-616.

[2] Schwarz S, Ramm E. Computer methods in applied mechanics and engineering[J]. Topology and Shape Optimization for Elastoplastic Structural Response, 2001, 190(15-17):2135-2155.

[3] Weinert M, Eschenauer H A. A parallel decomposition algorithm in application to structural design[J]. Advances in Engineering Software,1996,26(1):1-12.

[4] Papadrakakis M, Lagaros N D. Soft computing methodologies for structural optimization[J]. Applied Soft Computing Journal,2003,3(3):283-300.

[5] Chen Su-huan, Wu Jie. Interval optimization of dynamic response for structures with interval parameters[J]. Computers and Structures,2004,82:1-11.

[6] Schittkowski K. Theory implementation and test of a nonlinear programming algorithm[J]. Optimization Methods in Structural Design,1982,164:122-132.

[7] Davidon W C. Variable metric methods for minimization[R]. Argonne National Labs Report, ANL-5990, 2000.

[8] Fletcher R, Powell M J. A rapid convergent dscent method for minimization[J]. The Computer Journal, 1963,6:163-168.

[9] Maute K, Raulli M. An interactive method for the selection of design criteria and the formulation of optimization problems in computer aided optimal design[J]. Computers and Structures Volume, 2004, 82(1): 71-79.

[10] Chen Geng-dong. Introdction to structural optimization theory, methods and solutions[D]. Denmark: Department of Solid Mechanics Technical University of Denmark,1992.

[11] 粟塔山, 彭维杰, 周作益, 曾之华. 最优化计算原理与算法程序设计[M]. 长沙 :国防科技大学出版杜, 2001.

[12] Deif A S. Advanced matrix theory for scientist and engineers[M]. England: Abacus House,1992.

（责任编辑　曹　敏）