文章编号:1671-5497(2006)Suppl.-0046-03

用格子 Boltzmann 方法模拟圆柱绕流的振荡边界层

闫广武,刘艳红

(吉林大学 数学学院,长春 130012)

摘 要:提出了一种用于模拟圆柱绕流的振荡边界层流动的新方法——旋转系统平均法。该系综由一些相同的系统组成,每个系统除使用不同的网格外,具有相同的流动。经模拟圆柱绕流的振荡边界层发现,流体质点的流动具有平行于振荡方向离开圆柱、竖直于振荡方向流向圆柱的特点,同时也发现在紧邻圆柱出现的被称为二次流的4个涡旋流动现象。数值模拟结果符合经典的理论结果。该方法也可用于其他圆柱绕流问题。

关键词:流体力学;格子 Boltzmann 方法; Navier-Stokes 方程; 振荡边界层流动

中图分类号:O354 **文献标识码**:A

Lattice Boltzmann method for oscillatory boundary layer of circular cylinder flow

Yang Guang-wu, Liu Yan-hong

(*College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: A new method, rotation-assemble-average method, for the oscillatory boundary layer flow around a circular cylinder, was proposed. This rotation assemble is consist of same systems and same flows except used different lattice grids. By simulating the oscillatory boundary layer flow around a circular cylinder, it was found that fluid particles movement along the direction of getting away the circular cylinder in the parallel direction of oscillatory, the fluid particles movement along to the circular cylinder in the vertical direction, and the second flow phenomenon with four vertexes near the circular cylinder in the same time. The numerical results agree with classical theoretical results. This method can be used to other problems of flows around circular cylinder.

Key words: hydromechanics; lattice Boltzmann method; Navier-Stokes equations; oscillatory boundary layer flow

0 引 言

1992年提出的一种用于模拟 Navier-Stokes 方程的新的数值方法——格子 Boltzmann 方法。在过去的十余年中取得了长足的发展,已经成为一种计算流体力学的可选择的工具。该方法可以用于单组分的水动力学、多组分多相流、磁流体、化学反应流、多孔介质中流动等复杂流体流动的数值模拟[1]。然而,规则网格问题限制了格子 Boltzmann 方法的应用。

从格子 Boltzmann 方法发展的历史上看,曾出现几个消除网格限制的研究工作。Wolfram S 通过使用旋转网格构造了一套用于获得旋转对称

收稿日期:2005-07-31.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10072023);吉林大学创新基金资助项目(2004CX041).

作者简介:闫广武(1964-),男,教授,博士生导师.研究方向:流体力学与复杂系统.E-mail:yangw@jlu.edu.cn

的方案[2]。Benzi R 给出了基于非均匀网格的格子 Boltzmann 迭代格式[3]。He X 提出利用均匀网格与非均匀网格之间的变换，从根本上消除均匀网格限制的方法，使该方法的应用范围得到了很大的扩展[4,5]。Peng G 和 Xi H 给出了一般意义上的有限体积格子 Boltzmann 模型。他们的网格是无结构的，不需要利用背景的规则网格[6,7]。根据 Peng G 和 Xi H 的方法，格子 Boltzmann 方法可以应用到绕任意复杂边界的流动问题上。然而，在一般情况下，这种方法相当复杂，削弱了格子 Boltzmann 方法固有的优点。针对这个问题，作者构造了一种简单方便的获得旋转对称的方法——旋转系综平均方法，对于那些几何上旋转对称绕流问题是方便的。并提出了一种新的方法来克服标准格子 Boltzmann 模型中均匀网格限制的缺点。通过旋转网格，构造了具有相同几何边界和不同来流系统组成的系综，把所得到的许多这样的运算结果做系综平均，得到了很好的数值效果。作为例子，模拟了振荡圆柱绕流的边界层问题，模拟结果再现了经典的整流结果。

1　格子 Boltzmann 模型

1.1　9-Bit 格子 Boltzmann 模型

作者将流场所在空间离散成正方形格子。在正方形网格的每一个结点上存在 3 种类型的粒子：速率为 c、$\sqrt{2}c$ 和 0 的粒子。其中，速率为 c 的粒子沿着正方形的水平或竖直方向运动，速率为 $\sqrt{2}c$ 的粒子沿着正方形的方向运动，而 0 速率的粒子则静止，见图 1。

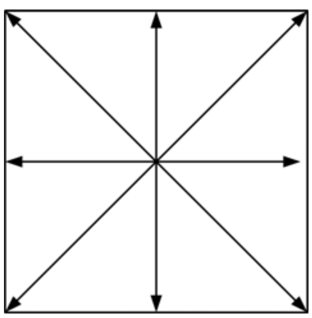


图 1　正方形格子

Fig. 1　Schematic of a square lattice

选择空间步长、时间步长分别为 Δx 和 Δy，并且 $\Delta x/(\Delta t)=c$。其中 c 为竖直或垂直方向的速率。用公式表示垂直和竖直方向的矢量为：

$$e_\alpha = c\left[\boldsymbol{i}\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2} + \boldsymbol{j}\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{2}\right]$$

$$1 \leqslant \alpha \leqslant 4$$

对角线矢量为：

$$e_\alpha = \sqrt{2}c\left[\boldsymbol{i}\cos\left(\frac{(\alpha-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{j}\sin\left(\frac{(\alpha-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$1 \leqslant \alpha \leqslant 4$$

式中：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别表示 x 和 y 方向的单位矢量。

定义 $f_\alpha(x,t)$ 为时刻 t、位置 x、方向 e_α 上的粒子分布函数。这样 $f_\alpha(x,t)$ 的取值为 [0, 1]。如果粒子系统存在局部平衡态分布函数 $f_\alpha(x,t)$，那么应存在下面的等式：

$$\sum_\alpha f_\alpha(x,t) = \sum_\alpha f_\alpha^{eq}(x,t) \tag{1}$$

这样，宏观变量密度可以通过方程(1)定义：

$$\rho(x,t) = \sum_\alpha f_\alpha(x,t) \tag{2}$$

同理，宏观动量定义为：

$$\rho(x,t)u_i(x,t) = \sum_\alpha f_\alpha(x,t)e_{\alpha i} \tag{3}$$

显然，平衡态分布函数满足：

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq}(x,t) = \rho(x,t) \tag{4}$$

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq}(x,t)e_{\alpha i} = \rho(x,t)u_i(x,t) \tag{5}$$

分布函数 $f_\alpha(x,t)$ 满足格子 Boltzmann 方程：

$$f_\alpha(x+\Delta t e_\alpha+\Delta t) - f_\alpha(x,t) = -\frac{1}{\tau}\left(f_\alpha(x,t) - f_\alpha^{eq}(x,t)\right) \tag{6}$$

在方程(6)中，τ 为单弛豫时间。方程(6)是最简单的 BGK 型的格子 Boltzmann 方程。我们选择如下形式的平衡态分布函数[8]：

$$f_0^{eq} = \frac{4}{9}\rho\left[1-\frac{3}{2}u^2\right]$$

$$f_{1,\alpha}^{eq} = \frac{1}{9}\rho\left[1+3(e_{\alpha j}u_j)+\frac{9}{2}(e_{\alpha j}u_j)^2-\frac{3}{2}u^2\right]$$

$$f_{2,\alpha}^{eq} = \frac{1}{36}\rho\left[1+3(e_{\alpha j}u_j)+\frac{9}{2}(e_{\alpha j}-u_j)^2-\frac{3}{2}u^2\right] \tag{7}$$

式中：脚标 1，2 分别代表水平、竖直对角线方向。

1.2　旋转系综平均

模拟圆柱绕流问题需要考虑旋转系综平均。构造若干不同的正方形网格，每个网格均与水平方向成 α 的整数倍的角度，并且均以圆柱的圆心为中心，见图 2。

我们选择 α 为：

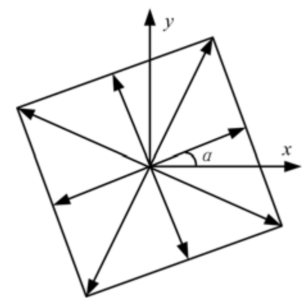


图 2 以圆柱圆心为中心、与水平方向成 α 角的网格

Fig. 2 A square grid rotates the center of cylinder on angle α

$$\alpha = 2\pi/n \tag{8}$$

这里 n 是正整数。由不同旋转角 α 组成的若干系统组成了该系综。特别地,可以选择旋转角 $k\alpha$ 构造网格,则该系综由 k 个系统组成,显然有:

$$k = 0,1,\cdots,n-2 \tag{9}$$

系综平均由下面关系式表示:

$$g = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} g_k \tag{10}$$

式中:g_k 为该系综中第 k 个系统的宏观变量,也可代表宏观动量等。本文选择系统个数 $n=8$。

2 圆柱振荡边界层模拟

为了测试旋转系综平均的效果,作者考虑了圆柱绕流的振荡边界层问题[9,10]。在不可压缩流动中,圆柱以下面的方式振荡,即运动速度为:

$$U(x,t) = U_0(x)\cos(\omega t) \tag{11}$$

选择坐标系在圆柱上,则上述问题可以理解成来流速度为 $U(x,t)$ 的圆柱绕流问题。这种圆柱绕流出现很有趣的二次流动,并且将静止流体进行整流。二次流所在的区域是一个薄层,称为振荡边界层。

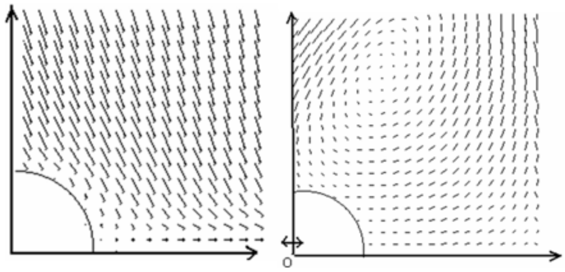
对于上述问题,力学的提法为:圆柱在来流 $U(x,t)$ 条件下的绕流问题,边界条件是:

当 $y\to\infty$ 时,$u=U(x,t)$,$v=0$;

圆柱表面上,$u=0$,$v=0$。

选择二维区域[0,1]×[0,1],圆柱的圆心在点(0.5,0.5)上,圆柱的半径 $R=0.01$。计算网格规模为 100×100。其他参数:空间步长 $\Delta x=0.01$,时间步长 $\Delta t=\Delta x/c$,速率 $c=3.0$,弛豫时间 $\tau=1.3$,密度 $\rho=0.1$,速度 $U_0=1.0$,振荡角频率 $\omega=1/\Delta t$。方程(11)中的时间 t 选择为 $l\Delta t$,这里 l 是迭代步数。

图 3(a)和图 3(b)分别为 $t=200\Delta t$ 和 $t=500\Delta t$ 时圆柱绕流的四分之一流场斑图。流场显示了主速度场和二次流动的涡旋。由于该结果是对称的,因此,全场有 4 个小的涡旋构成二次流,这个结果与经典的结果是一致的 。



(a) $t=200\Delta t$ 时的主流速度场 (b) $t=500\Delta t$ 时的二次流速度场

图 3 振荡圆柱附近的流场

Fig. 3 Patterns of the velocity field of the main flow

参考文献:

[1] Chen S Y, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1998, 30: 329-347.

[2] Wolfram S. Cellular automata fluid 1: basic theory[J]. J Stat Phys, 1986, 45: 471-526.

[3] Benzi R, Succi S. The lattice Boltzmann equation theory and applications[J]. Phys Reports, 1992, 222:145-197.

[4] He X Y, Luo L S, Dembo M. Some progress in lattice Boltzmann method, Part I nonuniform mesh grids[J]. J Comput Phys, 1996, 129: 357-363

[5] He X Y, Doolen G D. Lattice Boltzmannn method on a coordinate system: Vortex shedding behind a circular cylinder[J] Phys Rev E, 1997, 56:434-440

[6] Xi H W, Peng G W, Chou So-Hsiang. Finite-volume lattice Boltzmann method[J]. Phys Rev E, 1999, 59: 6202-6205.

[7] Peng G W, Xi H W, Duncan C. Finite volume scheme for the lattice Boltzmann method on unstructured meshes[J]. Phys Rev E, 1999, 59: 4675-4682.

[8] Hou S L, Zou Q S, Chen S Y. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method[J]. J Comput Phys, 1995, 118: 329-347

[9] Prandtl L, Oswatitsch K, Weighardt K. Fuhrer durch die stromungsleher [M]. Vieweg + Sohn: Braunschweig, 1969:249-254

[10] Schlichting H. Boundary-layer theory[M]. New York: MaGraw-Hill, Book Company, 1979.

(责任编辑 张祥合)