

# 适用于单快拍的多重信号分类改进算法

陈 涛, 崔岳寒, 郭立民

(哈尔滨工程大学 信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 经典多重信号分类(MUSIC)算法的子空间估计以多快拍数据估计得到的协方差矩阵为基础, 在实际应用中, 可用的快拍数并不确定。针对这一问题, 本文提出了一种适用于单快拍的 MUSIC 改进算法, 即 ISS-MUSIC 算法。该算法对经典 MUSIC 测向方法进行了改进, 将伪协方差矩阵构造法与共轭增强法相结合。新算法的优点为适用于单快拍, 且性能优于未进行共轭增强的基于伪协方差矩阵单快拍 MUSIC 算法。

**关键词:** 信息处理技术; 阵列信号处理; 波达方向估计; 单快拍; 经典多重信号分类算法

**中图分类号:** TN971.1    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1671-5497(2018)03-0952-05

**DOI:** 10.13229/j.cnki.jdxbgxb20170204

## Improved algorithm of multiple signal classification for single snapshot

CHEN Tao, CUI Yue-han, GUO Li-min

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The classical MUSIC algorithm based on the subspace estimation is dependent on covariance matrix estimation, which is built from a lot of snapshots. However, the number of the available snapshots is indeterminacy in the practical application. In order to solve the problem, we propose an improved MUSIC algorithm for single snapshot, called ISS-MUSIC algorithm. This algorithm improves the performance of the classical MUSIC algorithm, and it combines the method of constructing pseudo-covariance and the method of conjugate enhancement. The advantage of ISS-MUSIC algorithm is that it can be used in the case of single snapshot. Meanwhile, its performance outperforms the method of single snapshot MUSIC algorithm based on pseudo-covariance without enhancing conjugate.

**Key words:** information processing technology; array signal processing; direction of arrival (DOA) estimation; single snapshot; classical multiple signal classification (MUSIC) algorithm

## 0 引言

阵列信号处理是信号处理的一个重要分支, 着重于空间传输波携带信号的获取、处理和传输,

即对空间分布的组传感器接收的空间传输波信号进行处理以提取信息。

波达方向(Direction of arrival, DOA)估计作为阵列信号处理中的关键问题, 主要研究如何从

收稿日期: 2017-03-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61571146); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(HEUFP201769).

作者简介: 陈涛(1974-), 男, 教授, 博士。研究方向: 宽带信号检测、处理与识别。E-mail: chentao@hrbeu.edu.cn

通信作者: 郭立民(1977-), 男, 副教授, 博士。研究方向: 宽带信号检测、处理与识别。E-mail: guolimin@hrbeu.edu.cn

背景噪声中估计信号的到达角信息<sup>[1]</sup>。这个领域的研究经历了几十年的发展,已经形成了比较系统的理论体系<sup>[2]</sup>。DOA 估计技术在雷达、声呐、地质开发、微波无线电通讯、生物医学等领域均有广泛的应用,并取得了很大发展<sup>[3]</sup>。由于子空间算法,如 MUSIC(Multiple signal classification) 等可以突破瑞利极限,实现超分辨,所以近年来涌现出很多新型的基于子空间的测向算法<sup>[4,5]</sup>。

短快拍测向算法的研究主要针对军事和卫星通信,在阵列接收数据有限、目标高速运动的前提下,可以实现对目标的实时处理,并具有较高的 DOA 估计精度,可为高速运动目标的定位和跟踪提供技术支持<sup>[6,7]</sup>。单快拍类测向算法因其快拍数达到了短快拍的极限,属于短快拍测向算法中的特殊情况,而被单独归为一类进行研究,近年来很多专家学者将研究的目光锁向少快拍甚至单快拍下的阵列信号处理<sup>[8,9]</sup>。

DOA 估计算法以高分辨 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法为代表<sup>[10]</sup>。MUSIC 算法中,通常先得到协方差矩阵,对其进行特征分解和奇异值分解后得到噪声子空间,然后利用导向矢量与噪声子空间的正交性对信号入射方向进行估计<sup>[1]</sup>。基于协方差矩阵 MUSIC 算法的渐近性能接近克拉美-罗界<sup>[11,12]</sup>,但无法有效地应用于单快拍情况<sup>[13,14]</sup>。

本文分析了经典 MUSIC 算法不适用于单快拍的原因,并对其进行了改进,提出了一种适用于单快拍的 MUSIC 改进(Improved-single-snapshot MUSIC, ISS-MUSIC)算法。该方法将伪协方差矩阵构造法与共轭增强法相结合,适用于单快拍,且性能优于未进行共轭增强的基于伪协方差矩阵单快拍 MUSIC 算法。

## 1 信号模型

假设 K 个同频不相关远场窄带信号入射到由 M 个全向阵元组成的均匀线阵上,信号数 K 已知或已经估计得到,于是阵列输出矢量为<sup>[1]</sup>:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_M(t)]^T = \mathbf{As}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中:信号矢量  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_k(t)]^T$ ; 噪声矢量  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ ; 导向矢量  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\varphi_1}, \dots, e^{-j(M-1)\varphi_i}]^T$ ,  $\varphi_i = 2\pi d \sin(\theta_i)/\lambda$ ,  $\theta_i$  为第 i 个信号的入射角度,  $\lambda$  为信号波长。

假设入射信号为不相关的零均值平稳随机过程,第 i 个信号  $s_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) 的功率为  $\sigma_{s,i}^2$ , 噪声为高斯白噪声,每个阵元上的噪声功率为  $\sigma_n^2$ , 信号与噪声不相关<sup>[11]</sup>。

## 2 适用于单快拍的 ISS-MUSIC 算法

### 2.1 经典 MUSIC 算法不适用于单快拍的原因

在第 1 节的基础之上,得到阵列输出数据的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{P}$  为信号协方差矩阵;  $\sigma_n^2\mathbf{I}$  为噪声协方差矩阵;  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。

对  $\mathbf{R}$  进行特征分解,有:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H + \sigma_n^2\mathbf{G}\mathbf{G}^H \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{S} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k]$  为信号子空间;  $\mathbf{G} = [\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \dots, \mathbf{u}_M]$  为噪声子空间;  $\Lambda = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  为对角阵,其元素按从大到小排列为:  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_M = \sigma_n^2$ 。

信号子空间和噪声子空间是正交的,而信号波达方向上的阵列导向矢量在信号子空间内,所以其与噪声子空间是正交的,于是 MUSIC 算法通过搜索下列的极大值点来估计信号 DOA<sup>[15]</sup>:

$$f(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (4)$$

实际应用中,只能得到协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的估计值  $\mathbf{R}'$ (称为采样协方差矩阵),通常取:

$$\mathbf{R}' = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(l)\mathbf{x}^H(l) \quad (5)$$

式中: L 为快拍数。

对  $\mathbf{R}'$  进行特征分解后可得噪声子空间的估计值  $\mathbf{G}'$ ,此时搜索下列的极大值点来估计信号 DOA:

$$f'(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{G}'\mathbf{G}'^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (6)$$

如果只有一个快拍可用,由式(5)可知,采样协方差矩阵的秩为 1,而信号子空间的秩是大于信号数的,此时利用  $\mathbf{R}'$  的特征分解无法区分出信号子空间和噪声子空间,因此经典 MUSIC 算法不适用于单快拍<sup>[16]</sup>。

### 2.2 伪协方差矩阵构造方法

构造伪协方差矩阵的基本思想为:利用单快拍阵列接收信号,构造伪协方差矩阵,该矩阵可表示为:  $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{D}\bar{\mathbf{A}}^T(\theta)$  的形式。进而可利用常

规的空间谱估计算法来实现 DOA 估计。其中  $\mathbf{D}$  为  $K \times K$  维的满秩矩阵;  $\bar{\mathbf{A}}(\theta) = [\bar{\mathbf{a}}(\theta_1) \bar{\mathbf{a}}(\theta_2) \dots \bar{\mathbf{a}}(\theta_k)]$  为满足均匀线阵阵列流型的  $L \times K$  维矩阵, 其中  $L$  小于  $M$ 。 $\bar{\mathbf{a}}(\theta_k)$  的第  $p$  个元素可表示为:  $\exp\{j[\varphi_k + (p-1)\Delta\varphi_k]\}$ , 其中  $\Delta\varphi_k = (2\pi/\lambda)\sin\theta_k$ 。为保证伪协方差矩阵的秩为  $K$ , 应有  $L > K$ , 这样构造出来的伪协方差矩阵  $\mathbf{Y}$  是  $L \times L$  维的。

矩阵  $\mathbf{Y}$  的元素  $\mathbf{Y}(p, q)$  可表示为:

$$\mathbf{Y}(p, q) = \sum_{n=1}^K \sum_{m=1}^K \exp\{j[\varphi_n + (p-1)\Delta\varphi_n]\} \cdot \exp\{-j[\varphi_m + (q-1)\Delta\varphi_m]\} d_{nm} \quad (7)$$

式中:  $d_{nm}$  为矩阵  $\mathbf{D}$  的元素。

其中, 矩阵中的可利用信息可表示为如下形式:

$$\bar{\mathbf{X}}_m = \sum_{n=1}^K \exp\{j[\varphi_n + (m-1)\Delta\varphi_n]\} s_n \quad (8)$$

如果利用式(8)来构造式(7), 则  $\mathbf{Y}(p, q)$  可写成  $\bar{\mathbf{X}}_m \bar{\mathbf{X}}_m^T$  的形式。

当矩阵  $\mathbf{D}$  为对角阵时, 式(7)可表示为:

$$\mathbf{Y}(p, q) = \sum_{n=1}^K \exp\{j[\varphi_n + (p-q)\Delta\varphi_n]\} d_{mn} \quad (9)$$

此时, 只要对角线元素不为 0, 矩阵  $\mathbf{D}$  就是满秩的, 这样构造出来的伪协方差矩阵  $\mathbf{Y}$  可以表示成  $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{A}}(\theta) \mathbf{D} \bar{\mathbf{A}}^T(\theta)$  的形式。由上述介绍可知, 伪协方差矩阵的构造方法是利用式(9)确定最终形式的矩阵。

由式(8)可知,  $M$  个阵列接收信号的相位是位于  $[\varphi_n, \varphi_n + (M-1)\Delta\varphi_n]$  范围内的等差数列, 可表示的相位范围为  $(M-1)\Delta\varphi_n$ , 固定相位  $\varphi_n$  的取值与相位参考点的选择有关。这就是构造伪协方差矩阵时可用的信息。

假设  $s_n = s_n^*$ , 则有:

$$\bar{\mathbf{X}}_m^* = \sum_{n=1}^K \exp\{-j[\varphi_n + (m-1)\Delta\varphi_n]\} s_n \quad (10)$$

式(10)的相位是位于  $[-\varphi_n, -\varphi_n - (M-1)\Delta\varphi_n]$  范围内的等差数列, 这相当于增加了可利用的信息量。

基于以上理论, 令  $L = M$ 、 $\varphi_n = 0$ 、 $d_{mn} = s_n$  并代入式(9), 此时伪协方差矩阵可表示为<sup>[17]</sup>:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^* & \cdots & \mathbf{x}_M^* \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{M-1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_M & \mathbf{x}_{M-1} & \cdots & \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 2.3 共轭增强法

为进一步提高算法性能, 充分利用阵列输出数据的共轭信息, 在式(11)的基础上, 构造以下伪协方差矩阵<sup>[18]</sup>:

$$\mathbf{Y}' = [\mathbf{Y}, \mathbf{J} \mathbf{Y}^* \mathbf{J}] \quad (12)$$

式中:  $\mathbf{J}$  为交换矩阵, 其反对角线元素为 1, 其他元素为 0。

由式(12)可知, 此方法将  $M \times M$  维伪协方差矩阵拓展为  $M \times 2M$  维。

对拓展的伪协方差矩阵进行二阶积累, 公式如下<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_{yy} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}'(l) \mathbf{Y}'^H(l) = \\ &\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\mathbf{Y}(l) \mathbf{Y}'^H(l) + \mathbf{J} \mathbf{Y}^*(l) \mathbf{Y}^T(l) \mathbf{J}] = \\ &\mathbf{R}_{yy} + \mathbf{J} \mathbf{R}_{yy}^* \mathbf{J} \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.4 ISS-MUSIC 算法的步骤

综上所述, 将 2.2 节与 2.3 节提出的方法进行合并为 ISS-MUSIC 算法, 其步骤如下:

步骤 1 利用式(11)得到伪协方差矩阵  $\mathbf{Y}$ 。

步骤 2 利用式(12)得到共轭增强后的伪协方差矩阵  $\mathbf{Y}'$ 。

步骤 3 求伪协方差矩阵的二阶积累:

$$\mathbf{R}'_{yy} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}'(l) \mathbf{Y}'^H(l)$$

步骤 4 对  $\mathbf{R}'_{yy}$  进行特征分解, 以得到噪声子空间  $\mathbf{U}_{y2}$ 。

步骤 5 搜索谱函数:

$$f_{ax}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{y2} \mathbf{U}_{y2}^H \mathbf{a}(\theta)}$$

的极大值点确定信号入射方向。

## 3 仿真实验及性能分析

### 3.1 ISS-MUSIC 算法分辨能力

仿真条件: 均匀线阵的阵元数为 8; 阵元间距为半波长; 快拍数为 1; 信噪比为 10 dB; 入射角分别在  $0^\circ \sim 10^\circ$  和  $50^\circ \sim 60^\circ$  随机产生。ISS-MUSIC 算法的空间谱图如图 1 所示, 图中的两条竖线为原入射角度。由图 1 可知, ISS-MUSIC 算法具有较好的信号分辨能力。

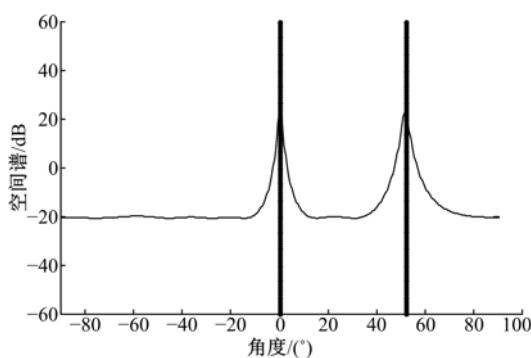


图 1 ISS-MUSIC 的空间谱图

Fig. 1 Space spectrum of ISS-MUSIC

### 3.2 测角精度比较

将 ISS-MUSIC 算法与未进行共轭增强的基于伪协方差矩阵单快拍 MUSIC 算法进行性能比较。仿真中,均匀线阵的阵元数为 8;阵元间距为半波长;快拍数为 1;入射角在  $0^\circ \sim 90^\circ$  随机产生。两种算法随信噪比变化的测向精度如图 2 所示。

由图 2 可知,ISS-MUSIC 算法的测向精度高于未进行共轭增强的基于伪协方差矩阵单快拍 MUSIC 算法的测向精度。

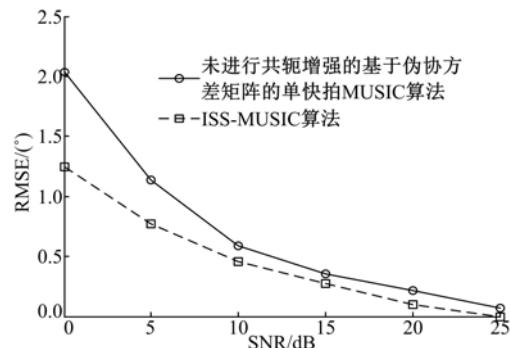


图 2 测向精度

Fig. 2 Accuracy of DOA

## 4 结束语

提出了一种单快拍下的测向算法。该算法对经典 MUSIC 测向算法进行了改进,将伪协方差矩阵构造法与共轭增强法相结合。仿真实验结果表明:ISS-MUSIC 算法在单快拍的条件下有较好的信号分辨能力,且测向精度优于未进行共轭增强的基于伪协方差矩阵单快拍 MUSIC 算法。

## 参考文献:

- [1] 王永良,陈辉,彭应宁,等. 空间谱估计理论与算法 [M]. 北京:清华大学出版社,2005.
- [2] Zeng Hao, Ahmad Z, Zhou Jian-wen. DOA estimation algorithm based on adaptive filtering in spatial domain[J]. China Communication, 2016, 12(13): 49-58.
- [3] 李新波,石要武,马彦,等. 基于 RARE-cumulant 的互耦矫正和 DOA 估计[J]. 吉林大学学报:工学版, 2010, 40(4): 1118-1121.
- [4] Li Xin-bo, Shi Yao-wu, Ma Yan, et al. Mutual coupling calibration and direction of arrival estimation based on RARE-cumulant algorithm[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2010, 40(4): 1118-1121.
- [5] Forster P, Ginolhac G, Boizard M. Derivation of the theoretical performance of a Tensor MUSIC algorithm[J]. Signal Processing, 2016, 129(1): 97-105.
- [6] Kintz A L, Gupta I J. A modified MUSIC algorithm for direction of arrival estimation in the presence of antenna array manifold mismatch[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(11): 4836-4847.
- [7] Tervo S. Single snapshot detection and estimation of reflections from room impulse responses in the spherical harmonic domain[J]. IEEE-ACM Transactions on Audio Speech and Language Processing, 2016, 24(12): 2466-2480.
- [8] Chen Chun-hui, Zhang Qun, Gu Fu-fei. 2D single snapshot imaging using MIMO radar based on SR [J]. Electronics Letters, 2016, 52(23): 1946-1948.
- [9] Elbir A M, Tuncer T. 2-D DOA and mutual coupling coefficient estimation for arbitrary array structures with single and multiple snapshots[J]. Digital Signal Processing, 2016, 54: 75-86.
- [10] 王凌,李国林. 利用单次快拍实现相干信源二维测向的新算法[J]. 北京理工大学学报, 2015, 35(5): 512-518.
- [11] Li Ling, Li Guo-lin. A new algorithm of 2D DOA whose source is coherent with single snapshot[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2015, 35(5): 512-518.
- [12] Li Xin-bo, Li Xiao-qing, Liu Guo-jun, et al. Quaternion min-norm algorithm for DOA estimation with acoustic vector sensor array[J]. Optics and Precision on Engineering, 2014, 22(7): 1969-1975.
- [13] Stoica P, Nehorai A. MUSIC maximum likelihood, and Cramer-Rao bound[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Process, 1989, 37(5):

- 720-741.
- [12] Suryapakash R T, Nadakuditi R R. Consistency and MSE performance of MUSIC-based DOA of a single source in white noise with randomly missing data [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(18):4756-4770.
- [13] Liao W, Fannjiang A. MUSIC for single-snapshot spectral estimation: stability and super-resolution [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2016, 40(1):33-67.
- [14] Hacker P, Yang B. Single snapshot DOA estimation [J]. Advances in Radio Science, 2010, 8(1921):251-256.
- [15] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7):984-995.
- [16] 刘剑, 宋爱民, 余侃民, 等. 适用于任意快拍数的 MUSIC 算法[C]//2016 全国电子战学术交流大会. 北京: 中国电子学会, 2016: 562-567.
- [17] 谢鑫, 李国林, 刘华文. 采用单次快拍数据实现相干信号 DOA 估计[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(3): 604-608.  
Xie Xin, Li Guo-lin, Liu Hua-wen. DOA estimation of coherent signals using one snapshots[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2010, 32(3): 604-608.
- [18] Wen Zhong, Li Li-ping, Wei Ping. Fast direction finding using modified pseudocovariance matrix[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 2006, 54(12):3914-3918.